

ÓRBITA DE CUERPO PUNTUAL EN TORNO DE UN ASTEROIDE DE FORMA IRREGULAR: DOS ESFERAS JUNTAS, ELÍPTICA Y CUADRADA

SINGLE-BODY ORBIT OF AN ASTEROID OF AN IRREGULAR FORM: TWO SPHERES TOGETHER, ELLIPTICAL AND SQUARE

Miguel Bustamante S.

Resumen

En este artículo presenta una situación problema en que se calcula las órbitas en torno a un asteroide con forma no esférico de un satélite. Para simplificar el cálculo, se realizó simulaciones en dos dimensiones (2D) en torno a un asteroide compuesto por dos masas circulares, asteroide de forma elíptica, y un asteroide de forma cuadrada. Para resolver numéricamente estos problemas, se implementó Runge Kutta 4 en el ambiente python3. Como resultado, se obtiene que la forma de los asteroides afecta la órbita del satélite. Esto plantea un desafío para la planificación de las misiones a los asteroides, ya que la distribución de masa no permite determinar el tipo de órbita.

Palabras clave: órbita, asteroide, cuadrupolo, simulación numérica, python.

Abstract

In this article, he presents a problem situation in which the orbits are calculated around an asteroid with a non-spherical shape of a satellite. To simplify the calculation, simulations were carried out in two dimensions (2D) around an asteroid composed of two circular masses, an asteroid with an elliptic shape, and a square shaped asteroid. To solve these problems numerically, Runge Kutta 4 was implemented in the python3 environment. As a result, it is obtained that the shape of the asteroids affects the orbit of the satellite. This poses a challenge for the planning of asteroid missions, since the mass distribution does not allow to determine the type of orbit.

Keywords: orbit, asteroid, quadrupole, numerical simulation, python

Introducción

Últimamente, nos hemos enterado de acercamiento a asteroides, que no necesariamente presenta esta simetría esférica. Un buen ejemplo de esto es Última Thule (Figura 1) (news BBC 2019; Woods 2018), que consiste en dos bloques esféricos adjuntos.

El 9 de febrero del 2001, la NASA pudo posar NEAR Shoemaker sobre el asteroide Eros, en una misión cuyo objetivo inicial no era ese. Esta fue la primera vez que objeto construido se posaba en un asteroide (Veverka et al. 2001). El año 2018, Japón logró posar dos sondas en la superficie de Ryugu (Figura 2) (Gibney et al. 2018).



Figura 1: Imagen de Última Thule



Figura 2: Imagen de Ryugu

Como se observa de las imágenes, no tiene una forma regular y por tanto analizar las órbitas desde el punto de vista de una partícula, ya no es válido.

En este trabajo vamos a calcular ciertas órbitas de una satélite de 1000 kg de masa, en torno de un asteroide o platinoide de 1021 kg. La forma de los platinoides a estudiar son: dos esferas adjuntas, de forma de elipse y con forma cuadrada en el plano 2D.

1. Órbitas regulares

En el caso de dos cuerpos, que se consideran como masa puntuales, la energía potencial actuando entre ellos es

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{\|r\|} \tag{1}$$

donde $\|r\|$ es la distancia entre ellos. La fuerza asociada a este potencial (ecuación 1) es

$$F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{\|r\|^2} \tag{2}$$

Igualando la ecuación 2 a la masa por la aceleración (segunda ley de Newton) y escrita en coordenadas polares, se obtiene las ecuaciones dinámicas de la órbita

$$m_2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} = 0 \tag{3}$$

La ecuación, angular, que es igual a cero, es la conservación del momento angular. Esta relación se transforma

en $\dot{\theta} = \frac{L}{r^2}$. Reemplazando esta expresión en la ecuación 3, componente radial se obtiene la relación diferencial para las órbitas

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2} \tag{4}$$

Al definir $u = 1/r$, la ecuación 4 se transforma en

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G}{L} \tag{5}$$

cuya solución de la ecuación (5) es

$$r(\theta) = \frac{L^2/G}{1+(CL^2/G)\cos(\theta)} \tag{6}$$

Definimos $\epsilon = CL^2/G$ como la excentricidad de la órbita. En la tabla 1, se presenta las órbitas con el rango de excentricidad.

Tabla 1: Tabla resumen de las órbitas

ϵ	Órbita
0	Circular
$0 < \epsilon < 1$	Elíptica
1	Parabólica
$\epsilon > 1$	Hiperbólica

Este resultado es conocido, y básicamente describe las órbitas de un cuerpo con simetría esférica y muy alejado, de modo que se comportan como masas puntuales (Beer, Jr. and Cornwell 2012; Williams F. Riley, Leroy D. 2001). Pero, cuando la distancia al centro del conjunto de masas, o masa que no presenta simetría, puede alterar este tipo de órbita. Es justamente la pregunta que se hace en este trabajo: ¿la forma del cuerpo influye en la órbita de un satélite?

1.1. Distribución de masa discreta

Para poder contestar la pregunta, vamos a tener tres tipos de asteroide: dos masas adjunta, en forma de elipse y en forma de cuadrado.

El primer asteroide tiene dos esferas adjuntas de radio R cada una (Figura 3).

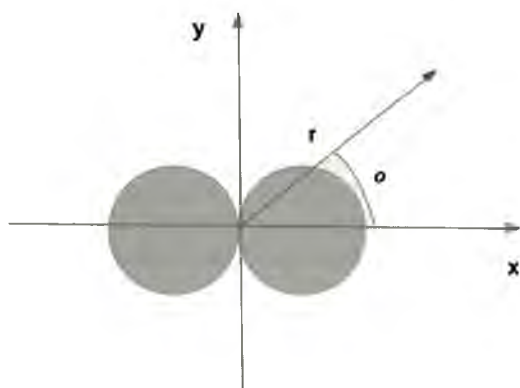


Figura 3: Dos masas adyacentes. Masa total M.

La energía potencial de esta configuración es

$$U(x, y) = -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x-R)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+R)^2+y^2}} \right) \tag{7}$$

En la representación del plano, donde el eje vertical en el valor de la energía U (x, y), se observa que alejado de las masas las líneas se comportan como contornos esféricos (Figura 4).

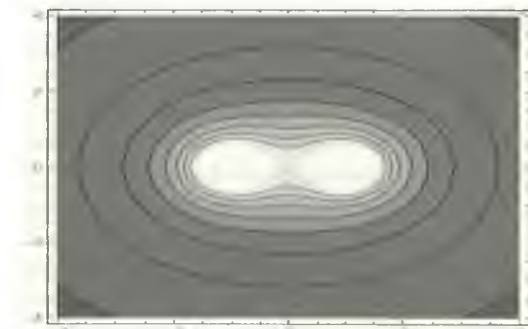


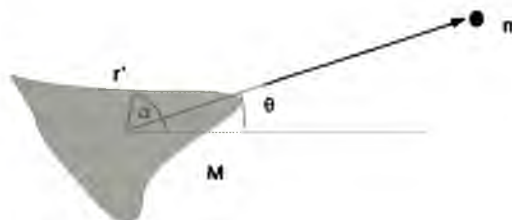
Figura 4: Líneas equipotenciales.

Para radios cercanos a la distribución de masa, la fuerza ya no va ser radial o dirigido al centro. Esto va afectar la órbita cercana a la distribución de masa. La expresión de la fuerza de esta configuración, sin aproximación es

$$\vec{F}(x, y) = -GMm \left(\frac{(x-R, y)}{\sqrt{(x-R)^2+y^2}} + \frac{(x+R, y)}{\sqrt{(x+R)^2+y^2}} \right) \tag{8}$$

1.2 Formas de masa no regular

El resultado obtenido en la sección 1.1 es de una fuerza central, de masas puntuales. Supongamos que una masa tiene una forma irregular (Figura 5).



Masa irregular

Figura 5: Bosquejo de un objeto con contorno no esférico.

La energía potencial para la masa m debido a una masa no regular, se puede escribir

$$U(r) = - \int \frac{Gm dM}{|r-r'|} \tag{9}$$

donde $dM = \rho(r')r' dr' d\theta$, donde r' recorre la distribución de la masa, dependiendo del ángulo α con $0 < \alpha < 2\pi$.

1.2.1 Forma del objeto elipse

Si se tiene una distribución elíptica homogénea continua de masa M descrito por los contornos r'(alpha) (figura 6.)

$$r'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\cos(\alpha)/a)^2 + (\sin(\alpha)/b)^2}} \tag{10}$$

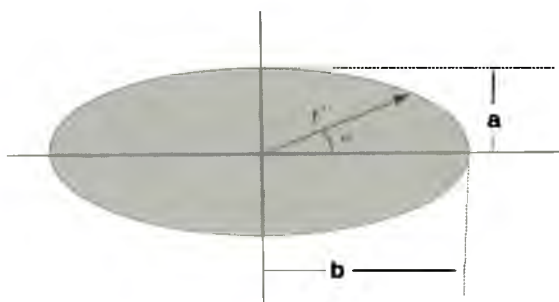


Figura 6: Contornos elíptico del asteroide.

En particular, $a = 10000$ m y $b = 20000$ m, y se asume que la densidad es uniforme e igual a $\rho(r) = \rho_0 = \frac{M}{a \cdot b \cdot \pi}$. La expresión del potencial de esta configuración es

$$U(r, \theta) = -G \int \int \frac{m \rho_0 r' dr' da}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos(\theta + \alpha)}} \quad (11)$$

siendo r , la distancia del centro del sistema al punto (x, y) . La expresión de la fuerza del potencial de la ecuación (11), viene dado por la expresión

$$\vec{F}(r, \theta) = -Gm \int \int \rho_0 dr' da \left[\frac{r'(r+r' \cos(\theta+\alpha))\hat{r} - (r' \sin(\theta+\alpha))\hat{\theta}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos(\theta+\alpha)^3}} \right] \quad (12)$$

Como vemos de ella expresión de la fuerza [ecuación (12)] depende de $r(\alpha)$. Del potencial (ecuación 11), en una representación de las líneas de igual potencial (equipotenciales) (figura 7), se observa que en la cercanía no tiene un comportamiento como el de una partícula puntual.

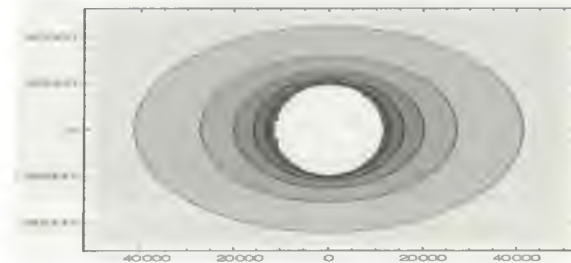


Figura 7: Líneas de equipotenciales de un asteroide de contorno elíptico

1.3 Forma cuadrada, de lado 2a

La función que describe el contorno de cuadrado desde su centro viene dado por la expresión.

$$r(\alpha) = \begin{pmatrix} a/\cos(\alpha) & 0 < \alpha < 2\pi \\ a/\cos(\pi/4 - \alpha) & \pi/4 < \alpha < 3\pi/4 \\ a/\cos(3\pi/4 - \alpha) & 3\pi/4 < \alpha < 5\pi/4 \\ a/\cos(5\pi/4 - \alpha) & 5\pi/4 < \alpha < 7\pi \\ a/\cos(7\pi/4 - \alpha) & 7\pi/4 < \alpha < 2\pi \end{pmatrix} \quad (13)$$

En este caso, ara la simulación $a=10000$ m y la densidad $\rho_0 = M/(4a^2)$ (figura 8). La ecuación (12) sigue siendo válida para el cuadrado.

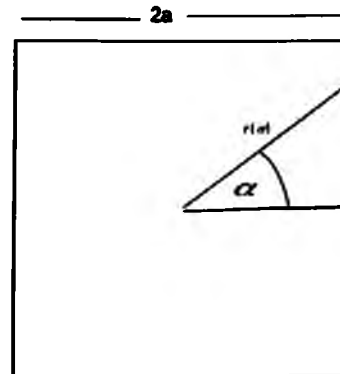


Figura 8: Contorno cuadrado.

2. Métodos y resultados

Para la simulaciones, el valor de la masa del asteroide $M = 10^{21}$ kg (Wikipedia, Asteroide), y la masa del satélite $m=1000$ kg. La posición inicial del satélite es $\vec{r} = (90000, 0)$ m y la velocidad inicial sólo va a tener una componente $v_0^y = (0, v_{0y})$. Con la posición inicial, y asumiendo que el asteroide es una partícula, calcula la velocidad que debiera tener una órbita circular a esa

distancia; es decir de la ecuación 3, con $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \frac{v_{0y}}{r}$, del cual se obtiene que que la rapidez del satélite en torno una masa M, es

$$v_{0y} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Con los valores de G, M y r, la velocidad de una órbita circular da $v_{0y} = 800$ m/s. Para comparar el efecto de la distribución de la masa, se simulan las trayectorias con distintas velocidades de v_{0y} : 1800 m/s, 8000 m/s, 15000 m/s, 18000 m/s, 20000 m/s.

El programa de las órbitas, se implementa en Python3, donde se aplicó runge kutta 4, además de las librerías propias de python3: scipy.integrate, odeint, math (Landau et al. 2007).

2.1 Resultados de las simulaciones

2.1.1 Dos masas esféricas, adyacentes

Inspirado en el encuentro de Ultima Thule, se simuló la órbita del satélite en torno de dos masas iguales, pero que en total de las masas es M. La velocidad inicial

fue de $\vec{v} = (0, 800)$ m/s (figura 9). Como resultado de la simulación, la órbita no es cerrada: no es circular ni elíptica.



Figura 9: Órbita del satélite, con rapidez de 800 m/s, de las dos masas esféricas.

Para una velocidad de $v_{oy}=1000$ m/s, la órbita se aproxima mejor a una circunferencia, pero sigue siendo no cerrada (figura 10)

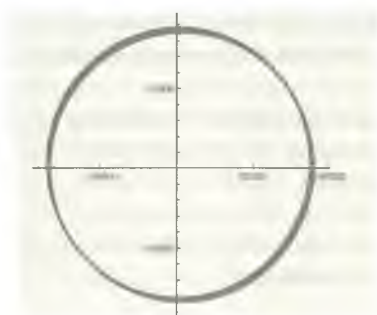


Figura 10: Órbita del satélite, con rapidez de 1000 m/s, de las dos masas esféricas.

Sin embargo, para 2000 m/s, la órbita es sin retorno.

2.1.2 Asteroide en forma de elipse

El resultado de las simulaciones genera órbitas que chocan con el asteroide cuando la rapidez de salida es menor 18000 m/s. Este ya un cambio con respecto a la trayectoria anterior. Para valores superiores, las órbitas son no cerradas en la simulaciones (Figura 11).



Figura 11: Órbitas parciales de la configuración elíptica.

2.1.3 Asteroide cuadrado

Al igual que el caso anterior, las trayectoria chocan con el asteroide cuando la rapidez es menor que 20 000 m/s. Para valores superiores, también presenta órbitas abiertas similar de la órbita elíptica (figura 12).



Figura 12: Órbita de asteroide cuadrado.

Al comparar las órbitas de la elipse y el cuadrado vemos que se difieren, pero tienen un comportamiento similar (figura 13).



Figura 13: Órbita para $v_{oy}=20000$ m/s, para forma elíptica y cuadrada.

Discusión de resultados

Por los resultados presentados, es claro que la distribución perturba las órbitas. De hecho, nos corresponde a órbitas cerradas, y cuya trayectoria viene afectado por la distribución de la masa de los asteroides. Una expansión multipolar (Jackson 1998) en el plano en coordenadas cilíndricas del potencial (ecuación 7).

$$\vec{F}(r, \theta) = -Gm \int \rho_0 dr' da \left[\frac{r'(r+r' \cos(\theta+\alpha)) - (r^2 \sin(\theta+\alpha))\beta}{r+r'-2rr' \cos(\theta+\alpha)} \right] \quad (14)$$

De la ecuación 14, el primer término corresponde a un potencial de la masa puntual, el segundo término corresponde al momento dipolar, el tercer término de la serie es el momento cuadrupolar. En el caso del potencial gravitacional, no hay momento dipolar. La diferencia en las órbitas se debe al momento cuadrupolar (tercer término). El potencial asociado al momento cuadrupolar se puede presentar como

$$U_Q(r) = -G \frac{r' \cdot Q \cdot r}{2r^5}$$

donde \bar{Q} es el tensor cuadrupolar. Este tensor es simétrico y $Q_{ij} = Q_{ji}$, la diagonal suma cero. En los problemas que tratamos, están en el plano, por tanto tenemos una dimensión 2. En la tabla 2, se compara los valores del tensor de las distintas configuraciones

Q	Dos masas	Elipse	Cuadrado
11	$8R\rho$	$\rho \frac{ab}{4}(2a^2 - b^2)$	$a\rho \frac{a^4}{3}$
22	$-8R\rho$	$-\rho \frac{ab}{4}(2a^2 - b^2)$	$-a\rho \frac{a^4}{3}$
21	0	0	0

Estas expresiones algebraicas del tensor Q, dependen de los valores de a, b, R y p. Las órbitas van estar afectada por el termino del potencial cuadrupolar, pero la magnitud del efecto depende de los valores de los parámetros. A pesar que tienen la misma masa, la diferencia de las órbitas depende del tensor Q.

Conclusiones

Las órbitas de un satélite en torno un asteroide de forma irregular, es afectado por la distribución de la masa, que se expresa en el valor del tensor Q. Al comparar las órbitas de del asteroide elíptico, como cuadrado, se observa que las trayectorias cambian. Este efecto se expresa en el tensor cuadrupolar (Q) que da evidencia de los valores en cada distribución de la masa, forzando una órbita no cerradas, pero dependiendo de la distribución de la masa. Con este conocimiento, posar un satélite en la superficie de una asteroide irregular resulta complejo

por la cinemática que adquiere el satélite en torno del asteroide.

Bibliografía

Asteroide. Wikipedia, La enciclopedia libre. desde <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Asteroide&oldid=115884913>

B. B. C. news, Última Thule: la sonda New Horizons envía la primera imagen del objeto más distante del Sistema Solar jamás explorado-BBC News Mundo.

Beer, F., Jr, E. R. J and Cornwell, P. (2012). Vector Mechanics for Engineers: Dynamics, 10 edition. New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Gibney, E. *et al.*, (2018). Daring Japanese mission reaches unexplored asteroid Ryugu," *Nature*, vol. 558, p. 495.

Jackson, J.D. (1998) *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc.

Landau, R.H., Páez, M.J. (2007) Bordeianu, C.C. Computational Physics Problem Solving with Computers.

Veverka, J. *et al.* (2001) "The landing of the NEAR-Shoemaker spacecraft on asteroid 433 Eros," *Nature*, Vol. 413, p. 390.

Willians, L.D.S., Riley, F. (2001). *Ingeniería Mecánica Dinámica*. Barcelona.

Woods, P. (2018). Preparing to meet Ultima Thule, *Nat. Astron.*, Vol. 2, [10], p. 763.