CONCEPTO DE RESONANCIA

CONCEPT OF RESONANCE

Miguel Bustamante S[1].,Marcelo Robles C.[2]

Resumen

En este artículo se presenta una discusión sobre la definición del concepto de resonancia en un sistema mecánico y en un sistema eléctrico. En los textos de Física de uso común nuestro país, se suele definir resonancia sobre la base de la frecuencia propia, donde existe máxima amplitud en la posición o la carga sin efectos viscosos. Sin embargo, la máxima amplitud en la posición o carga no coincide con la frecuencia propia del sistema cuando no se desprecia el efecto viscoso. Una definición apropiada de resonancia para ambos sistema será aquella que expresa que se produce resonancia al tener la máxima transferencia de energía al sistema. En ese caso la potencia disipada en el sistema es máxima, y cuya frecuencia de máxima amplitud es efectivamente la frecuencia propia. El caso analizado, de la misma forma que el caso comentado en los libros de texto corresponde a una fuerza externa periódica y de frecuencia definida; el caso más general y realista de funciones externas periódicas pero con más de una frecuencia en su espectro de frecuencias, la que se analiza usualmente mediante series de Fourier, queda fuera de la presente discusión.

Palabras clave: Resonancia, amplitud, preconcepto, potencia.

Abstract

This article presents a discussion on the definition of the concept of resonance in a mechanical system and in an electrical system. In the physics texts commonly used in our country, resonance is usually defined on the basis of the own frequency, where there is maximum amplitude in the position or load without viscous effects. However, the maximum amplitude in the position or load does not coincide with the system's own frequency when the viscous effect is not disregarded. An appropriate definition of resonance for both systems will be one that expresses that resonance occurs when having the maximum transfer of energy to the system. In that case the power dissipated in the system is maximum, and whose frequency of maximum amplitude is effectively the own frequency. The analyzed case, in the same way that the case commented in the textbooks corresponds to a periodic external force and of a defined frequency; the most general and realistic case of periodic external functions but with more than one frequency in its frequency spectrum, which is usually analyzed by means of Fourier series, is outside the present discussion.

Keywords:

1 Universidad Adolfo Ibáñez; miguel.bustamante@uai.cl
2 Universidad Tecnológica Metropolitana; mrobles@utem.cl

Recibido: 30 octubre 2018; **Aceptado:** 14 diciembre 2018

Introducción

En general, se entiende por resonancia aquella situación en la cual algunos sistemas son particularmente sensibles a ciertas frecuencias de perturbaciones que estos experimentan. Un ejemplo de resonancia es el conocido y estudiado colapso del puente de Tacoma, el que se produjo el 7 de noviembre de 1940, en Tacoma, Estados Unidos, cuando bajo la acción de una brisa que soplaba periódicamente se produjo la respuesta de un aumento constante de las oscilaciones del puente colgante, hasta que la estructura no resistió más y cayó. El proceso tomó el tiempo suficiente como para que se pudiese filmar lo sucedido, video que en la actualidad puede consultarse en sitios tales como Youtube, material que es usado frecuentemente para hacer estudio de casos en clases de Ondas y Vibraciones (Reitz y otros, 1996).

La explicación usual es que el puente de Tacoma colapsó debido a la resonancia ocurrida entre el viento que soplaba periódicamente, la fuerza periódica externa, y la constitución material misma del puente, la que presenta variadas frecuencias propias, es decir frecuencias que de coincidir con la frecuencia de la fuerza externa, pueden llevar al sistema, en este caso al puente, a un aumento desmedido de la amplitud, la que una vez excede los factores de seguridad del diseño producen la fractura y posterior colapso de la estructura.

Para modelar este fenómeno que se denomina Movimiento Forzado se suele modelar estudiando la respuesta del sistema mecánico y/o eléctrico al ser estimulado por una señal sinusoidal, a la que se asocia una frecuencia denominada frecuencia forzante.

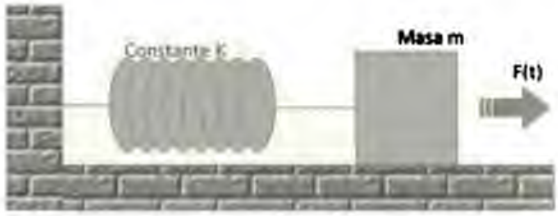
No todas las perturbaciones periódicas son armónicas, pero se sabe que usando el Teorema de Fourier es posible representar cualquier señal periódica como una serie de funciones armónicas. Analizando el efecto de la respuesta a una señal armónica permite extraer la información necesaria para posteriormente, utilizar el principio de superposición sea posible obtener la solución al caso más complejo de una multiplicidad de frecuencias forzantes actuando simultáneamente.

Este análisis, el de una fuerza externa periódica y de frecuencia forzante única, es estudiado frecuentemente en los libros de Física utilizados en el aula. Uno de los tópicos relevantes en dichos análisis es el de la resonancia. Sin embargo, se observa una falta de precisión al momento de explicar el concepto, lo que lleva a que los estudiantes tengan posteriormente dificultades en el manejo de este concepto tan relevante en áreas como la sismología, el análisis estructural y el electromagnetismo. En ocasiones se define resonancia como la máxima amplitud del movimiento o de la corriente. A continuación se estudiará esta situación considerando lo que sucede en sistemas mecánicos como los que observaremos en sismología, y lo que sucede en sistemas eléctricos, tales como los que se suele encontrar en circuitos resonantes.

Sistema mecánico

El sistema mecánico que se estudia es el de un resorte de constante K con un extremo fijo, y con el otro extremo unido a una masa M, en un medio viscoso que se modela por medio de una fuerza.

$$f = -\gamma v.$$



La ecuación dinámica que describe a este sistema es:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t)$$

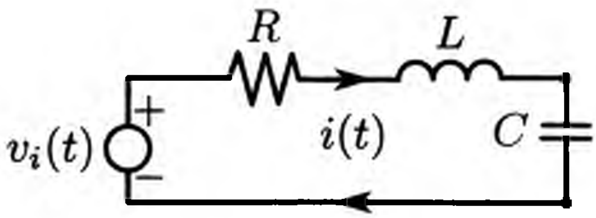
Donde F (*t*):

$$F(t) = Real\{F_0 e^{iwt}\} = F_0 \cdot \cos(\mathrm{wt})$$

fuerza externa sinusoidal (Beer y Johnston, 2013; Riley, 2001).

Sistema eléctrico

En el caso del sistema eléctrico, un circuito en serie LRC: condensador (C), resistencia (R) y bobina (L) conectado a una fuente de voltaje sinusoidal $V(t) = V_0 e^{wti}$



La ecuación dinámica que describe a este sistema eléctrico, se deduce de las ecuaciones de Kirchoff y es:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = iwV(t)$$

Recordemos que la carga del condensador y la corriente se relacionan de la forma $I = \frac{dQ}{dt}$

Resultados de los sistemas forzados

La solución de las ecuaciones dinámicas para los sistemas mecánico y eléctrico considera la solución a la ecuación homogénea más una solución particular. La solución a la ecuación homogénea decae rápidamente en el tiempo, y por ello es llamada transiente. El transiente no se estudia para problemas estacionarios por lo que la solución se reduce a la solución particular, la que en los casos estudiados es:

$$x(t) = x_0(w)e^{i(wt+\delta)}$$

para el sistema mecánico.

$$I(t) = I_0(w)e^{i(wt+\delta)}$$

para el sistema eléctrico.

Las Tabla 1 y Tabla 2 resume los resultados que se obtienen del sistema mecánica y sistema eléctrico (Reitz, Milford y Christy, 1996).

Tabla 1. Expresiones de la amplitudes de posición, velocidad y potencia P_{rms}, desfase δ con el valor de frecuencia del máximo y el valor del máximo de las amplitudes asociado a la frecuencia.

	Amplitud	Frecuencia del máximo	Máximo de la amplitud
Amplitud de x(t)	$x_0(w) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-w^2m)^2 + (\gamma w)^2}}$	$\frac{\sqrt{2km-\gamma^2}}{\sqrt{(2)}m}$	$X_{0_{max}} = \frac{(2mF_0)}{\sqrt{(4\gamma^2 km - \gamma^4)}}$
Amplitud de la velocidad v(t)	$v_0(w) = \frac{wF_0}{\sqrt{(k-w^2m)^2 + (\gamma w)^2}}$	$\sqrt{\frac{K}{m}}$	$v_{0_{max}} = \frac{(mF_0)}{\gamma K}$
Amplitud de la potencia rms	$P_{rms} = wX_0(w)\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{\frac{K}{m}}$	$P_{max} = \frac{(mF_0)}{\gamma K}\frac{\sqrt{2}}{2}$
Desfase δ	$\delta(w) = atan\left(\frac{-\gamma w}{k-w^2m}\right)$	$\sqrt{\frac{K}{m}}$	$-\pi/2$

Tabla 2: Expresiones de la amplitudes de la carga Q, corriente y potencia P_{rms}, desfase δ con el valor de frecuencia del máximo y el valor del máximo amplitud asociado a la frecuencia.

	Amplitud	Frecuencia del máximo	Máxima amplitud
Amplitud de Q(t)	$Q_0(w) = \frac{V_0}{\sqrt{(wR)^2 + (-w^2L + 1/C)^2}}$	$w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$	$Q_{0_{max}} = \frac{2V_0L}{\sqrt{\frac{4LR^2 - CR^4}{C}}}$
Amplitud de I(t)	$I_0(w) = \frac{wV_0}{\sqrt{(wR)^2 + (-w^2L + 1/C)^2}}$	$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$I_{0_{max}}\frac{V_0}{R}$
Potencia	$P_{rms}(w) = \frac{1}{2}I(w)^2R$	$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$P_{rms_{max}} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}$
Desfase δ	$\delta(w) = atan\left(\frac{wL - \frac{1}{(wC)}}{R}\right)$	$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\pi/2$

Discusión de los resultados

Como se puede observar de las Tablas 1 y 2, se tiene que las amplitudes máxima de la posición (sistema mecánico) y de la carga (sistema eléctrico) ocurren a distintos valores de la velocidad e intensidad de corriente, y potencia.

En el libro de Ingeniería mecánica Dinámica de Riley, (Riley, 2001) como también Sthepheson y StarZhinski (Sthepheson, 1960; Starzhinski, 1985) Holliday (Resnick y Resnick, 2004), se define la resonancia cuando la frecuencia externa w tiene valores cercanos a la frecuencia propia[1]. En el caso mecánico, esta frecuencia propia es $\sqrt{K/m}$. Sin embargo, Sthepheson, analiza la amplitud de posición, y no despreciando el efecto del amortiguamiento, calcula que existe un corrimiento con respecto de la frecuencia propia. Estudia también la amplitud de la velocidad del movimiento y da cuenta

1 Frecuencia propia: se entiende a la frecuencia donde la amplitud es máxima, sin amortiguamiento.

que es máximo en la amplitud de la velocidad cuando la frecuencia externa es la frecuencia propia.

Por otro lado, Serway (Serway y Jewett, 2012), también se define la resonancia de la misma forma, es decir, cuando la amplitud es máxima con el amortiguamiento cercano a cero. Pero, agrega un comentario analizando la potencia $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, la que es máxima en este movimiento cuando la frecuencia coincide con la frecuencia propia.

Al revisar lo que sucede con el Sistema Eléctrico se observa lo siguiente: en los textos de Serway (Serway y Jewett,, 2012), Halliday (Resnick y Resnick, 2004), Reitz (Reitz et ál., 1996) y Tipler (Tipler y Tipler, 2000), definen la resonancia como la situación en la cual la parte compleja de la impedancia del circuito es cero. En ese caso obtienen para este sistema, que la frecuencia es $w = 1/\sqrt{LC}$, cuando la corriente tiene una amplitud máxima.

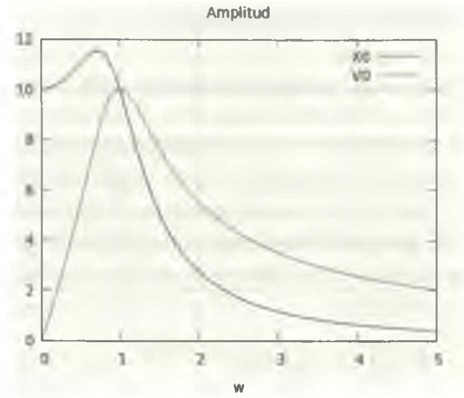
Es posible entonces observar que las definiciones de resonancia que se dan para los sistemas mecánicos y eléctricos, en los diferentes libros; en los de mecánica lo definen por medio de la amplitud de movimiento, pero restringido a cuando la viscosidad es cero. Si se observa la Tabla 1, la amplitud en rigor, es máxima en una frecuencia diferente a la propia. Si se hiciera un análogo con los circuitos eléctrico, la posición x(t) corresponde a la carga Q(t). En ambos casos, cuando la frecuencia w es cero (w = 0) la amplitud tienen valores distintos de cero lo que se puede observar de la Tablas 1 y 2.

Es claro, que definir la resonancia de la forma de máxima amplitud puede llevar a un mal entendimiento del fenómeno. Esto se puede visualizar bien al comprar las amplitudes en función de la frecuencia. La Figura 3 muestra la amplitud máxima del movimiento $X_0(w)$ y de la velocidad $V_0(w)$ no coinciden. Este comportamiento también se observa entre la amplitud de la carga $Q_0(w)$ y la amplitud de la corriente $I_0(w)$.

Conclusión

Como se ha ilustrado, las definiciones de resonancia presentadas por los textos de Física de uso común en nuestro país, pueden ser ambiguas. Decir que hay resonancia cuando la amplitud es máxima, en el sistema mecánico o en el eléctrico, no coincide con la amplitud máxima de velocidad y corriente.

Una definición adecuada de resonancia sería entonces por medio de la potencia. Cuando la potencia es máxima la frecuencia coincide con la frecuencia propia. Se puede decir entonces que existe resonancia cuando se produce la máxima transferencia de energía de un sistema a otro.



Amplitud de movimiento y velocidad. F0 = 10 N, k = 1 N/m, m = 1 kg, Y = 1 Ns/m

Bibliografía

Beer, F.P. Johnston E. (2013) Mecánica Vectorial para Ingenieros Ed. Cornwell,, Self.). Retrieved from http://es.slideshare.net/lorenzinofernandez/mecanica-vectorial-para-ingenieria-9-ed-beer-johnston

Reginald J. Sthepheson. (1960). *Mechanics and Properties of Matter.* Ed.Toppan Printing Company, (2nd Tokyo, Japan: Toppan Printing Company.

Reitz, Jhon R., Milford, Frederick J., Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la Teoría electromagnética.* Ed.Addison Wesley Iberoamericana, (4th ed.). Naucalpan de Juárez, México.

Resnick, R. & H. D., & Resnick, R. & H. D. (2004). *Física 4ª*. CECSA, México.

Riley, Willians F. (2001). *Ingeniería Mecánica Dinámica.* Ed.Reverté, Barcelona.

Serway R. A.,Jewett, J. W. (2012). *Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics.* Ed. Brooks/Cole (9th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning

Starzhinski, V. M. (1985). *Mecánica Teórica.* Ed. MIR,. URSS: MIR.

Tipler, P. A.,Tipler, P. A. (2000). *Física para la ciencia y la tecnología (2 volúmenes).* Ed. Reverté, Barcelona.