EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES ADITIVAS EN EL MARCO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Raimundo Olfos A(*)

Resumen

Reflexionamos en torno a los saberes implícitos en la resolución de una ecuación lineal. Se pone en evidencia que estos saberes se sostienen en evidencias sensibles y prescripciones pragmáticas de carácter convencional, que en definitiva constituyen un saber complejo que no es fácil de aprender. El escrito muestra que tanto la dimensión descriptiva como prescriptiva del saber matemático están presentes en la enseñanza de la matemática y particularmente en la formación de profesores de matemáticas. Por último se deja ver la conveniencia de robustecer la profesionalización por medio de la conformación de una comunidad docente que reflexione sobre la práctica, acreciente el saber didáctico y se mantenga vigilante ante la transposición del saber, su evolución histórica y su requerimiento social.

Palabras claves: ecuaciones lineales, conocimiento matemático, formación de profesores, filosofía de la matemática.

Abstract

We reflec about the implicit knowledge required to solve linear equations. We gather evidence that this knowledge is based into sensible evidences and conventional pragmatic prescriptions, which really constitute a complex knowledge that is not easy to learn. The paper shows that both the descriptive and prescriptive dimensions of mathematical knowledge are present in mathematic instruction and particularly in mathematic teachers training. Finally we suggest see the convenience of strengthening the professionalization by means of the participation into an educational community that reflects into the instructional practice, improves the didactic knowledge and stays alert to knowledge transposition, knowledge historical evolution and its social requirement.

Key words: linear equations, mathematical knowledge, teacher training, philosophy of mathematics.

1. EL SABER Y EL SABER HACER SOBRE NÚMEROS Y ECUACIONES.

Nociones prácticas y teóricas acerca de los números.

Encontramos los albores de la *numeración* en las marcas o registros de conteo que el hombre prehistórico dejara en huesos y cavernas hace ya 20 mil años. Parece ser que de manera recurrente, el hombre primero accede a un *útil* o herramienta que poco a poco comprende y transforma en un *objeto* de estudio que le permite la optimización pragmática de su quehacer. Surge así primero un *problema* y frente a él una *tarea* humana para enfrentarlo. La ejecución de la *tarea* implica la utilización de una *técnica* más o menos desarrollada que da origen a la *tecnología* y a la *teoría* que la cobija.

Esta mirada, presente en la tesis de Douady (Douady,1984), es compartida por Bachellard (Bachellard,1999) en términos de una *praxeología* u organización matemática constituida por una dimensión práctica, el *saber hacer*, y una dimensión teórica, el *saber*. La dimensión práctica del *saber hacer* es expresada en términos de *tareas* y *técnicas* matemáticas que un sujeto pone en juego ante las *situaciones* o *problemas* que atiende. La dimensión teórica, por otra parte, es descrita en términos de *tecnologías* y *teorías* que justifican las *técnicas* y la organización teórica en si misma.

Fue primero en un contexto práctico que el hombre desarrolló las nociones de número natural, de número cardinal y de adición, saberes que le permiten abordar problemas de conteo y diversas situaciones como ordenar, agregar, añadir, agrupar, reunir, ubicar y trasladar, entre otras. Con el devenir de los siglos el hombre desarrolló técnicas para representar las cantidades, para contar y para sumar. Luego formalizó esos saberes e identificó invariantes y sistemas de representación que le permitieron tener un mejor dominio de sus técnicas y una mejor comprensión incluso de los fenómenos por medio de la modelación.Con respecto al conteo, el hombre antiguo tomó conocimiento de que era posible obte-

* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

ner el cardinal de un conjunto finito independientemente del orden adoptado para la enumeración de sus elementos. De hecho, pudo contar los animales de un rebaño poniéndolos en correspondencia biunívoca con un montón de piedrecillas, sin importar qué piedrecilla corresponde a cada animal. Esto es, ya en la antigüedad supo de los invariantes del conteo.

Con respecto a la suma, el espíritu matemático llevó al hombre de la antigüedad a tomar conciencia de "**Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales también**", lo que fue declarado por Euclides hacia el siglo III a.C. como la noción común 2 en "Los Elementos". Para Euclides, una noción común o axioma es una afirmación general, válida en todas las ciencias, cuya evidencia se hace admisible sin demostración. En los Elementos, los axiomas están separados de los postulados, ya que no sólo son aceptados sin una demostración, sino que además son evidentes. La formulación del axioma 2 da a la correspondiente propiedad el estatus de un *saber teórico* útil en el contexto de la resolución de problemas por medio de ecuaciones.

El saber y el saber hacer en la resolución de ecuaciones lineales

Frente al *problema* "¿Cuál es la longitud de un trazo que al extraer de él 5 unidades queda con una longitud de 12 unidades?" es posible asociar la *tarea* matemática de resolver la ecuación $f - 5 = 12$. Una forma de abordar la *tarea* es determinar el número que sustituyendo el recuadro f lleva a la igualdad. Otra forma de atender la *tarea* es aplicar la técnica de "pasar el 5, que posee signo menos, con signo contrario al otro lado de la igualdad". Una *técnica* más comprensible corresponde a plantear una ecuación equivalente a la inicial argumentando que "la igualdad se mantiene si sumo 5 en ambos lados de la igualdad", justificada esta última *técnica* por el *axioma euclidiano* ya citado.

Es usual que para resolver ecuaciones tanto profesores como alumnos, y ya en octavo básico, usen *técnicas* como "pasar el número que acompaña a la incógnita con signo contrario al otro lado de la igualdad" o "sumar en ambos lados de la ecuación el inverso aditivo del número que acompaña a la incógnita". También es usual que los profesores y los alumnos frente a tales *técnicas* ofrezcan *justificaciones* o argumentaciones como las siguientes: "las ecuaciones, al igual que las balanzas en equilibrio, mantienen la igualdad o equilibrio si se realizan simultáneamente las mismas acciones en ambos lados de la ecuación", o bien a *justificaciones* más teóricas como la *ley de cancelación*, esto es, el *axioma 2 de Euclides*. La *justificación* ofrecida a partir de la analogía con la balanza sustenta la manipulación de símbolos abstractos, que en el fondo hace referencia a la teoría de polinomios, a partir de *situaciones* concretas muy particulares pero de alto contenido empírico y visual para el alumno. Esto es, la naturaleza de esa *justificación* es *empírica, de naturaleza inductiva* y no *deductiva*, La segunda *justificación* corresponde al axioma 2 de Los Elementos; por ende, tiene cabida en el marco teórico *deductivo euclidiano*. Marco que admite una vertiente *empirista* al identificar como evidentes los axiomas en el mundo de lo real.

2. LO EVIDENTE Y LO CONVENCIONAL. DISTINTAS TEORÍAS Y UNA REALIDAD

De los axiomas evidentes a los postulados arbitrarios, pragmáticos.

Las *justificaciones* que ofrecen los estudiantes, tanto de educación media como de pedagogía en matemáticas, se enmarcan en una comprensión de la *matemática como modelo* de la realidad. En este sentido, los *axiomas* son entendidos por los estudiantes de pedagogía y por los mismos profesores usualmente como *verdades evidentes* más que como *postulados arbitrarios*. La misma *definición* de número hace referencia, según los profesores, más allá de los *símbolos* o numerales, a las cantidades, pero no a *entes formales* como parte de los objetos constitutivos de los *sistemas numéricos*. Para el común de la gente, incluyendo una proporción significativa de profesores, los números son *objetos abstractos* por el hecho de hacer referencia a las propiedades de los objetos físicos y no a objetos en si mismo. Esto es, los profesores tienen conciencia de que los números hacen referencia a las *magnitudes* de los objetos físicos o bien al cardinal de un grupo de objetos sean estos tangibles o no, y en virtud de ello los consideran abstractos. Pocas veces los profesores tienen el interés de hacer notar de que los números son *objetos formales* que se estudian al interior de una teoría formal. Es bajo el contexto descrito que los profesores de matemáticas y sus alumnos entienden los *axiomas* como *verdades evidentes*, en el sentido propuesto por Euclides, y no como *postulados arbitrarios* sobre los cuales se construye una *teoría formal*.

Ni los profesores de aula ni los estudiantes de pedagogía parecieran hacerse partícipes de la crítica moderna a la postura de Euclides que considera que las *definiciones* se basan en *ideas intuitivas* y que en ellas se suponen *propiedades* que no se *postulan* ni se *demuestran*. Las críticas a la geometría euclidiana, que llevaron a autores como Hilbert a fines del siglo XIX a proponer formas alternativas de introducir la geometría, no parecen ser de interés para los profesores de aula. Pese a que la *geometría euclidiana* no tiene el rigor y la profundidad que se exige actualmente a una *teoría*, la propuesta de los *Elementos* ha permitido desarrollar una *geometria intuitiva* y más fácil de "ver" que la de otros planteamientos. Por eso su enseñanza no ha desaparecido y está vigente para los profesores en sus aulas.

En los *Elementos*, los *axiomas* son *verdades evidentes* por lo cual no necesitan de una *demostración* que los justifique como tales. En consecuencia, lo que se deduce de ellos conserva ese carácter de *verdad*. En cambio, en el trabajo de Hilbert no se tiene en cuenta el carácter de *verdad* de los *axiomas*; lo fundamental es que el conjunto de *axiomas* es *consistente*, esto es, que tales axiomas no se contradicen entre sí. Los resultados que se deducen de los axiomas tienen el carácter de *deducciones* pero no un valor asociado de verdad. Para Hilbert, sólo importa la coherencia del discurso, no la naturaleza de los objetos a que hace referencia ni los *significados* (interpretaciones) que les podamos asociar; lo que corresponde a un movimiento general en la matemática del siglo XIX y gran parte del siglo XX.

Es así como de los *números* y los *sistemas de numeración* los matemáticos pasaron al estudio formal de los *sistemas numéricos*. Entendiendo un *sistema formal* o un sistema axiomático como un artificio matemático compuesto de *símbolos* que se unen entre sí formando *cadenas* que a su vez pueden ser manipuladas según *reglas* para producir otras cadenas; de modo que de esta manera por medio de los *sistemas formales* somos capaces de representar ciertos aspectos de la *realidad*, obteniendo *modelos* de ella.

Pese a este importante salto epistemológico en la comprensión cultural del saber matemático, hoy en día ni los programas de estudio ni los textos ni los profesores de aula hacen una distinción entre la postura euclidiana y la hilbertiana, más aún teniendo como referencia cultural en la actualidad que la búsqueda rigurosa de fundamentos no supera los límites impuestos por el *teorema de incompletitud de Gödel*, que sostiene que ningún *sistema consistente* se puede usar para *demostrarse* a sí mismo.

La suma y la función sucesor

Más allá de la *desustanciación* de los *objetos* matemáticos que dieron origen a *teorías* más rigurosas, en esta sección reflexionamos en torno a dos marcos teóricos matemáticos de la modernidad que ubican el axioma euclidiano "al sumar cantidades iguales a cantidades iguales se obtienen resultados iguales" entre los primeros axiomas y teoremas de los correspondientes desarrollos teóricos.

El primer marco matemático se refiere a la estructura aditiva de los *números reales*, que para el caso de las ecuaciones lineales lo esencial se tiene en el grupo aditivo de los números enteros. En este marco se asume la existencia de una operación llamada *suma*, para la cual cada par de reales x e y tiene como imagen un único real llamado suma de x e y; esto es, se asume el axioma de una ley de composición interna, operación, que en particular es una función. Bajo este contexto el símbolo + no tiene más significado que el precisado en los *axiomas* de conmutatividad, asociatividad, existencia del neutro aditivo y existencia de opuesto para todos los reales. De estos *axiomas* se deduce la siguiente *propiedad*:

Teorema. $a=b$ ssi $a+c=b+c$. Demostración: En el sentido de que $a=b$ *implica* $a+c=b+c$, la hipótesis $a=b$ y la noción de par ordenado lleva a $(a, c) = (b, c)$. Ahora bien, por el hecho de que la suma es una función, necesariamente, $a+c=b+c$. La propiedad recíproca es la ley de cancelación y se prueba como sigue: Hipótesis: $a+c=b+c$. Tesis: $a=b$. Demostración: Sobre la base del *axioma* de la existencia de opuestos, para el real c existe un real y tal que $c+y=0$. En la condición de la hipótesis sumamos a ambos miembros y: $(a+c)+y=(b+c)+y$, verificándose la igualdad en virtud de que la suma es una función. Aplicando el *axioma* de la propiedad asociativa se tiene: $a+(c+y)=b+(c+y)$. Pero como $c+y=0$, entonces $a+0=b+0$. Aplicando el *axioma* del neutro, $a=b$.

El segundo marco teórico es una versión con lenguaje funcional de la axiomática elaborada por Peano para estudiar el sistema de los números naturales. Esta versión consta de tres términos primitivos y tres axiomas. Los términos primitivos son un conjunto N, una función *s( )* de N en N, y una constante "1". Los axiomas son: (Ax.1) "*s( )* es inyectiva", (Ax.2) "1 no pertenece al recorrido de *s( )*", y (Ax.3) "si un subconjunto S de N satisface: si (a) 1 Î N y (b) para cada n Î N, n Î S => s(n) Î S, entonces S=N". En este marco la adición, denotada por +, se define en N por recurrencia como sigue: $x+1= s(x)$, y $x+s(y) = s(x+y)$. La deducción de la propiedad $a=b$ ssi $a+c=b+c$ es: Demostración por inducción sobre c. Como *s( )* es inyectiva (ax.1), $a=b$ ssi $s(a)=s(b)$. Por definición $a+1=b+1$. Supóngase que $a=b$ ssi $a+n=b+n$. Siendo *s( )* inyectiva, $a+n=b+n$ ssi $s(a+n)=s(b+n)$, por definición esto es $a+s(n) = b+s(n)$. De esta manera también $a=b$ ssi $a+s(n)=b+s(n)$.

Ambos marcos utilizan la noción de función, en el primer caso para la operación suma y en el segundo para la noción implícita de sucesor. La primera demostración es fácil de confundir con argumentos de marcos empiristas ya que la existencia de la suma y de la propiedad asociativa es tan evidente para un alumno de octavo grado que no parece un supuesto formal o arbitrario. Por otro lado, el proceso deductivo tiene como tesis o resultado nuevo la propiedad cancelativa que es tan evidente como la propiedad asociativa, tanto así que de hecho Euclides la propone como axioma; cuestión por la cual el estudiante no percibiría en la demostración un saber ni un saber hacer, sino probablemente sólo un encadenamiento entre proposiciones evidentes. Por su parte, la segunda demostración es eminentemente recursiva y por ende compleja, pero a la vez enriquecedora y sin dudas satisface la curiosidad intelectual. Pues se deduce de la noción de sucesor, aparentemente simple, propiedades para la suma. Bajo el primer marco teórico se afirma a priori que la adición con números enteros o reales satisface las propiedades claves sobre las cuales se sostienen las estructuras algebraicas más robustas. Bajo el segundo marco, se constata que los números y en general las cantidades, incluyendo las magnitudes, satisfacen la propiedad en cuestión por la manera misma en que se construyen uno a uno los números a partir de su anterior. Cabe hacerse la pregunta sobre cuál será el entendimiento que adquiere un estudiante de pedagogía en matemática sobre estas ideas, y cómo podrían articularse éstas en el marco de su formación profesional; y, más aún, cuál sería el efecto en el saber y en el saber hacer pedagógico actuales.

La definición inductiva de los naturales esta asociada a las definiciones recursivas de diferentes fenómenos, como por ejemplo los fractales. En consecuencia, estamos en presencia de una forma de entender la realidad a partir de lo discreto y no a partir de una pseudo hipótesis de un continuo real que como modelo muchas veces ha sido confuso y objetable. La representación de fenómenos naturales a partir de la recursividad es consistente con la noción de evolución y la complejidad creciente que muestra el universo. Bajo las restricciones del tiempo y el espacio en que vivimos, la noción de recursividad parece consistente con los principios interaccionistas que el hombre asume para explicar el mundo y abordar su comprensión.

3. LO DESCRIPTIVO Y LO PRESCRIPTIVO, SUS IMPLICANCIAS EN LA ENSEÑANZA Y EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES.

El formalismo prescriptivo y el constructivismo descriptivo.

La convulsión científica que llevó a la matemática a principios del siglo XIX a la denominada crisis de los fundamentos conllevó al posicionamiento hegemónico de una corriente de pensamiento en filosofía de las matemáticas de tipo prescriptiva, normativa, que por ya casi dos siglos, ha relegado la tradicional, siempre activa y vigilante corriente filosófica descriptiva, naturalista, fuente perenne del conocimiento científico.

La corriente prescriptiva se consolidó a partir de la posición absolutista de la matemática impulsada por el formalismo hilbertiano. Para esta corriente la objetividad de la Matemática es inseparable de su formulación lingüística: "La Matemática no es más que un juego del lenguaje formal". Esta concepción prescriptivista considera tanto al absolutismo formalista y logicista como al platonismo como corriente filosófica. En la posición absolutista el conocimiento matemático está constituido por verdades absolutas y representa el único sustento del conocimiento verdadero, independientemente de la lógica y de las afirmaciones que pueden ser ciertas en virtud del significado de sus términos. El conocimiento matemático es absolutamente fijo y objetivo, y la racionalidad matemática es concebida como una propiedad de los sistemas formales.

La corriente descriptiva, naturalista, ha comenzado a reposicionarse desde la segunda mitad del siglo pasado, recuperando las posiciones no absolutistas de la primera mitad de ese siglo. Ella analiza el conocimiento matemático desde la práctica y sus aspectos sociales, asignándole al lenguaje un nivel secundario en relación con los objetos Matemáticos. Esta corriente naturalista hace suyo el constructivismo matemático y, dentro de éste, el intuicionismo de Brouwer, así también el convencionalismo, el constructivismo social y el cuasi-empirismo de Lakatos.

El empirismo tiene sus raíces en Locke, Berkeley y Hume a principios de los siglos XVII y XVIII, quienes combatieron la afirmación de existencia de ideas innatas, concediendo la preponderancia a la experiencia por sobre las demás fuentes de conocimiento, esto es, identifica las verdades matemáticas con generalizaciones empíricas. Así, los conceptos matemáticos tienen orígenes empíricos y las verdades matemáticas se derivan de las observaciones del mundo físico.

El cuasi-empirismo, que surge de la oposición de su fundador Lakatos al logicismo y formalismo, afirma que la matemática informal y práctica tiene más importancia que la matemática formal o acabada. Considera que la dialéctica conjetura-refutación y el uso de contraejemplos son las técnicas más fecundas para la elaboración de teorías matemáticas informales. El cuasi-empirismo aproxima el concepto filosófico de las matemáticas al de las

Ciencias Naturales, argumentado que el conocimiento de la matemática no es a priori infalible. Esta corriente filosófica posiciona la dimensión histórica de las matemáticas, mostrando que los conceptos y resultados particulares de las matemáticas se han desarrollado partiendo de problemas concretos y de las dificultades históricas para su resolución (Lakatos, 1978, 1981).

El constructivismo social sostiene que el desarrollo de los conocimientos matemáticos y la comprensión subjetiva de las matemáticas se derivan del diálogo y las negociaciones interpersonales; razón por la cual postula que hacer y aprender matemáticas deben surgir a partir de procesos similares.

En resumen, la corriente descriptiva actual asume una perspectiva relativista bajo la cual la matemática es entendida como una producción del espíritu humano, abriendo el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal. Ambas corrientes parecen necesarias. Por un lado es razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, y por el otro lado, no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y más aún, no puede haber crítica sin una formulación lingüística de las construcciones. Si bien el formalismo y el intuicionismo comparten el carácter exacto de las leyes matemáticas, es el papel que los formalistas otorgan a la lógica y al lenguaje en la actividad matemática y en la justificación de los resultados lo que provoca la separación entre las dos escuelas. El formalismo mantiene una posición absolutista mientras el intuicionismo mantiene una posición relativista en relación con el conocimiento matemático. Los intentos realizados durante la primera mitad del siglo XX para reducir la actividad matemática a justificaciones lógicas expresadas preferentemente a través de la teoría de conjuntos e ignorando otros modos de expresión, no han producido los resultados esperados. En la historia se complementa la racionalidad matemática subyacente en la actividad matemática de las dos grandes corrientes.

Orientaciones: la enseñanza de la matemática como proceso y como producto

La matemática es socialmente compartida como un proceso y como un producto cultural. Como producto es un sistema conceptual lógicamente organizado, como proceso es una actividad humana de resolución de problemas. Ambas características son inseparables. La matemática es también un lenguaje simbólico con un sistema de signos propios que expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Los problemas en matemáticas pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. Todas estas consideraciones deberían estar presentes en la organización de la enseñanza de la matemática.

La matemática como organización lógica de conceptos y propiedades es fuente de explicaciones sobre dificultades y obstáculos en el aprendizaje; como lenguaje tiene características estructurales y reglas de funcionamiento que actúan como obstáculos y conllevan dificultades en el aprendizaje. La escuela absolutista centra la atención en esta dimensión de la matemática y la cristaliza como un 'objeto de enseñanza', bajo el supuesto de que el matemático 'descubre' la matemática en una realidad externa a él y que luego justifica dentro de una estructura formal, dejándola lista para ser enseñada. Desde esta perspectiva, la tarea del profesor consiste en 'inyectar' el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso coherente. Por su lado, el estudiante no tiene la libertad de modificar la estructura del discurso y su tarea se limita a decodificarlo. Desde esta perspectiva, la didáctica tiende a prescribir la tarea del profesor sugiriéndole una adecuada ordenación de los contenidos, poniendo énfasis en el contexto de la justificación como estado superior del conocimiento y guiándolo por medio de preceptos universales tales como el paso de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto o del análisis a la síntesis.

La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que muchas veces ocasiona dificultades en el aprendizaje de la matemática. Este quehacer está presente tanto en la mirada absolutista como en la naturalista. La respuesta a problemas, relacionados tanto con el mundo natural o social como con la propia disciplina, explica la evolución de los objetos matemáticos: conceptos y teorías. Mientras en el modelo absolutista de la matemática prima en la enseñanza el afán por conocer la matemática ya construida, bajo el modelo naturalista prima la intención de "hacer" matemática. Bajo esta segunda mirada la comprensión matemática no se refiere a la cantidad de conocimientos matemáticos que tiene el alumno, sino a la competencia del razonamiento matemático desarrollado por el mismo. La propuesta curricular adscrita a este modelo se ajusta a una metodología basada en la confrontación con situaciones con significado para el estudiante que favorecen el descubrimiento, la creatividad y la autonomía, por sobre una metodología receptiva y mecánica. Asimilando los principios del constructivismo social, este enfoque tiende a respetar los conocimientos previos de los estudiantes y los significados que adquieren en ellos; permitiéndoles construir el conocimiento partiendo de métodos propios y de la negociación con otros, sin distanciarse de las aplicaciones de las matemáticas ni de las instancias de motivación intrínseca.

En la medida en que el aprendizaje de las matemáticas es entendido como la apropiación de un saber acabado, la capacidad del alumno para aprehender la estructura interna de dicho saber condicionará la posibilidad misma de llevar a cabo el aprendizaje. Por el contrario, si el aprendizaje de las matemáticas se observa como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno, entonces las características psicoevolutivas de los alumnos tendrán menor relevancia para la organización de los contenidos del aprendizaje. Fuera de la predilección que se pueda tener por la corriente descriptiva, naturalista, por sobre la prescriptiva, es necesario respetar los equilibrios epistemológicos y social. La concepción de la matemática escolar que prevalece en la globalidad actual internacional llevó a un currículo básico con contenidos mínimos obligatorios, conceptuales, procedimentales y actitudinales, susceptibles de la intervención de los profesores y las unidades educativas, que se constituyen en medios para conseguir finalidades educativas, precisadas en objetivos de carácter fundamental.

Implicancias en la formación de profesores: ¿cuál debe ser su saber?

La teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) pone en evidencia la diversidad de variables que intervienen en el paso del conocimiento matemático científico al conocimiento matemático deseado y susceptible de ser enseñado en una etapa educativa. En este proceso, el saber matemático escolar es organizado como el resultado de diferentes ajustes proporcionados por la acción didáctica y por ello difiere cualitativamente de su saber de referencia. Esta teoría supone la existencia de variables que actúan en los distintos niveles de la noosfera, identificando cinco fases en la transposición. Entre estas fases se tienen la determinación del currículo, la elaboración de textos, la preparación de las clases por parte del profesor, la gestión de la clase y la comprensión del alumno reportada por la evaluación del aprendizaje.

Ahora bien, ¿de qué manera puede aportar la formación de profesores para desarrollar en ellos la habilidad para interpretar coherentemente el currículo oficial de matemáticas, favoreciendo una transposición que no desnaturalice el saber de referencia pero que realmente ofrezca un saber pertinente y útil al estudiante como sujeto social?

Es de nuestra convicción, conforme lo refleja la presentación de las ecuaciones como útil y objeto de estudio, que el estudiante de pedagogía, en armonía con los otros agentes que participan en la transposición, debe reflexionar en torno al objeto matemático, reconocer los sistemas de representación asociados e identificar las situaciones en que es posible ponerlo en juego. El futuro profesor debe asumir un rol activo en una comunidad que selecciona el saber y lo adapta a la realidad social en que le corresponde actuar. La formación profesional debiera desarrollar en el futuro profesor el interés y potencial para integrar una comunidad de agentes educadores en que la transposición didáctica es un foco de atención. El profesor debiera integrarse a una comunidad que profundice en el saber de referencia, en el saber a enseñar y en el requerimiento de saber escolar local. Nótese que el verbo usado en las dos últimas afirmaciones es "debiera" y no "debe", puesto que es inútil y perjudicial formar a los profesores para trabajar en condiciones irreales. Esto es, los cambios en la formación deben articularse con los cambios en las condiciones de trabajo, como el recargado horario frente a alumnos.

La formación del profesor debe orientarse a lograr que el profesor se familiarice en profundidad con la matemática que ha de enseñar. En el contexto local de las ecuaciones que hemos tratado en este artículo, el profesor debe egresar de pedagogía con nociones de teoría de números, sistemas numéricos y sistemas de numeración; la comprensión de las estructuras algebraicas y globalmente de la teoría de polinomios; la comprensión de las teorías de los números naturales a los reales, con un conocimiento parcial de los números complejos, y con experiencias de reflexión en profundidad en torno a la historia y la epistemología de las matemáticas que le permitan situar cultural y socialmente las nociones de cantidad, magnitud, cardinal y número, en sus distintas acepciones. También debe distinguir entre la existencia no solo física y conceptual, sino también la existencia formal de los objetos matemáticos, y debe diferenciar una definición como introducción de un término nuevo a la teoría de la definición como asignación de sentido o semántica a un referente sintáctico.

Desde la perspectiva del dominio de tareas y técnicas asociadas a las ecuaciones debe ser capaz de identificar distintos sistemas de representación y las conversiones asociadas en el sentido desarrollado por Duval (Duval,1999); debe poseer un conocimiento básico de la evolución histórica de las ecuaciones, las condiciones para su génesis y de su rol en la cultura. Con respecto a la dimensión tecnológica teórica, el profesor debe tener un conocimiento de la evolución histórica de la lógica de justificación, identificando las teorías y los problemas matemáticos relacionados con la identificación de contextos de justificación, incluyendo por ejemplo las nociones sobre números y ecuaciones requeridas para atender a los problemas griegos de construcción con regla y compás y la identificación del plano de Argand en la interpretación de los números complejos. Como también en cuanto a la justificación axiomática, debe alcanzar la comprensión de las sucesiones de Cauchy como acercamiento a los números reales, y de la recursividad para definir la suma y justificar propiedades de números naturales.

Por último, quisiéramos destacar que el aprendizaje es un proceso biológico que requiere tiempo e involucra procesos de maduración. Por ende la formación inicial sólo puede abarcar en profundidad lo esencial y no puede aspirar a que el alumno logre la comprensión a cabalidad ni siquiera de los conceptos anteriores. Por ende se debe orientar la profesionalización en el marco de una cultura que se modifica y en cierto grado se autodetermina. El saber erudito a tratar en la formación profesional debiera dar seguridad y autocontrol para la inserción del docente, pero también debiera aportar con una postura autocrítica y de vigilancia epistémica para atender a las necesidades del contexto social, el fenómeno del envejecimiento de los saberes en el docente y los requerimientos de escenarios siempre cambiantes.

La formación de profesores no debiera aspirar acabar con la formación de un profesional erudito en el saber cultural actual, sino más bien debiera preparar un profesional activo que en el seno de su comunidad contribuya al desarrollo de un saber profesional en evolución y de relevancia social.

BIBLIOGRAFIA

Bedoya, L. Peano, Lawvere, Peirce; tres axiomatizaciones de los números naturales. Tesis Universidad del Tolima. Ibagué. En, http://www.unav.es/gep/TesisDoctorales/Axiomatizaciones.pdf,2003.

Chevallard, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **[19]** (2), p. 221-266, 1999

Douady, R. *Le jeu de cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des Mathématiques.* Thése de doctorat d'Etat. Université de Paris VII. 1984..

Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.*Traducción en español, 1999, Editorial Peter Lang S.A., 1995.

Puertas M. L. *Elementos, Libros I-IV* Ed. Gredos. Colección Biblioteca Clásica. Madrid. En http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm,1991.

Socas, M y Camacho, M. Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,Vol.X,N°.2,p.151-171,. http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/socasmachin.pdf, 2003