

# UNA PERSPECTIVA PARA LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORES DESDE EL ESTADO DEL ARTE DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Leonora Díaz Moreno,  
Dra. en Ciencias de la Educación.  
UMCE. Santiago, Chile.  
[leonoradm@gmail.com](mailto:leonoradm@gmail.com)

---

## Resumen

Se presentan elementos principales del estado del arte en la didáctica de la matemática y, en ese marco, se visualizan aspectos centrales a considerar para la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas. Se presenta, entre otras distinciones originarias del campo de la enseñanza y los aprendizajes en matemáticas, a las nociones de la transposición didáctica de saberes y los obstáculos epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales a los aprendizajes. Sigue una revisión de enfoques con que se han investigado los procesos de formación y actualización docentes. Se responde a las preguntas: ¿Cómo aprenden los profesores?, ¿cómo piensa el profesorado? y ¿cómo aprende a enseñar el profesorado? Sobre esa base se proponen ejes para la formación de profesionales de la enseñanza de la matemática en los niveles básico, medio y superior.

**Palabras claves:** Didáctica de la matemática; Formación de profesores.

## Abstract

Principal elements of the state of the art in the didactics of the mathematics are presented and, in this frame, there are visualized central aspects to consider for the initial and constant formation of the professorship of mathematics. Appears, among other original distinctions of the field of teaching and learnings in mathematics, the notions of the didactic transposition of knowledges and the epistemological, cognitive, didactic and sociocultural obstacles to the learnings. It follows a review of approaches with which there have been investigated the educational processes of formation and update. It is answered to the questions how the teachers learn? How he/she thinks the professorship? And how he/she learns to teach the professorship? On this base axes it proposes for teachers' formation of mathematics professorship of the first, second and third educational cycles.

**Keywords:** Didactics of the mathematics; Teachers' formation

## Introducción

El propósito de este artículo es presentar la confluencia de paradigmas y enfoques que dan cuenta del estado del arte en el campo de la didáctica de la matemática y en ese marco, dar una perspectiva personal desde la que se visualicen elementos para la formación inicial y continua de profesores. Enuncia, entre otras distinciones originarias del campo de la enseñanza y los aprendizajes en matemáticas, a las nociones de la transposición didáctica de saberes y los obstáculos epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales a los aprendizajes, las que se vienen transfiriendo a la

investigación didáctica en otras disciplinas del currículum. Sigue una revisión de los enfoques con que se han investigado los procesos de formación y actualización docentes. Enfoques actuales confluyen en considerar a la formación docente como parte de una actitud de aprender a enseñar para y durante la vida profesional. Esta revisión se articula en torno a las preguntas: ¿Cómo aprenden los profesores?, ¿cómo piensa el profesorado? y ¿Cómo aprende a enseñar el profesorado? Cierra el texto con elementos de un perfil para la formación de profesionales de la enseñanza de la matemática en los niveles básico, medio y superior.

**Paradigmas y Enfoques de la Didáctica de la Matemática.** El desarrollo actual de la didáctica de la matemática no es indiferente a la deriva en otros ámbitos: (a) Avances de los dominios de saberes a ser enseñados; (b) Aportes de los desarrollos de dominios disciplinarios a la base de la didáctica: de la psicología educativa, de la pedagogía, de la filosofía, de la historia de las ciencias y de la sociología; y, (c) Confluencias de los enfoques macro y micro, objetivo y subjetivo, que cristalizan en las ciencias humanas, abriendo miradas a la investigación en las didácticas específicas. Lo anterior ha profundizado las miradas y preocupaciones de la didáctica de la matemática en orden a mejorar nuestras prácticas de enseñanza con vistas a robustecer los logros de aprendizajes matemáticos.

El mundo anglosajón emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de saber didáctico, misma que en Francia (también en Alemania, España y otras regiones de Europa continental) se nomina "Didáctica de la Matemática". En tanto que para los desarrollos con acentos instruccionales de las escuelas española, alemana y ex soviética se recurre a la expresión "Metodología de Conocimientos Específicos" (Cantoral, 1999). En el amplio abanico de acercamientos a la investigación de la enseñanza y los aprendizajes de las matemáticas tales como la etnomatemática, con indagaciones más allá y más acá del aula y aquella investigación educativa de raíz anglosajona más allá y más acá de saberes matemáticos escolares específicos, ubicamos a la investigación en didáctica de la matemática, campo de la didáctica científica de la matemática en desarrollo que privilegia síntesis propias y apropiadas a nuestros requerimientos situados en los desafíos de enseñar y aprender matemáticas en las aulas.

Distinciones de la investigación en el dominio de la didáctica científica de las matemáticas. El campo de la didáctica científica de las matemáticas presenta hoy un panorama con diversidad de paradigmas, de enfoques y aproximaciones, preocupados por tomar en cuenta las dimensiones sociales y culturales de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Artigue, 2003, refiriendo a Sierpínska y Lerman, 1996): constructivistas inspirados por la epistemología genética de Piaget, socio-constructivistas, interaccionistas, antropológicos, así como el programa de investigación latinoamericano de la socioepistemología. Este presta especial atención tanto a la naturaleza sistémica de esos procesos de enseñanza y de aprendizaje como al carácter de construcción sociocultural de los saberes matemáticos. En este escenario la investigación didáctica matemática viene desarrollando múltiples marcos teóricos y metodologías que caracterizan los modos en que se eligen, expresan y abordan las preguntas de investigación, obteniendo distintos tipos de resultados y diversidad de descripciones.

La didáctica fundamental de la matemática, de origen francés, articula dos campos teóricos que sin ser independientes son distintos: el de la teoría de las situaciones didácticas iniciado por Guy Brousseau a comienzos de la década de los 70 y al cual diferentes investigadores han contribuido desde entonces, y el de la transposición didáctica desarrollado a comienzos de la década de los 80 por Yves Chevallard. Ambas miradas dirigen sus lentes a la epistemología de la matemática, dan forma y determinan en cierta medida el enfoque del estudio de la preparación matemática de los estudiantes. No obstante que estas teorías tienen objetivos diferentes, ambas se plantean el estudio de los fenómenos didácticos en un enfoque sistémico, aunque se refieren a niveles diferentes del análisis didáctico, uno local o micro-sistémico y el otro global o macro-sistémico.

La teoría de las situaciones didácticas se sitúa en un nivel local: ella apunta a modelar las situaciones de enseñanza, de manera de permitir una elaboración y una gestión controlada. En un

enfoque sistémico, la mirada se centra sobre sistemas didácticos, constituidos en torno de un profesor o profesora y de sus estudiantes. Sistemas de duración limitada, sumergidos en el sistema global de enseñanza, abiertos, vía este último, a la noosfera del sistema de enseñanza y, más allá, a la sociedad en la cual se inscribe el sistema de enseñanza. Fundada en un enfoque constructivista, parte del principio de que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparezca al menos problemático para los estudiantes.

Contrato Didáctico, Situaciones A-Didácticas y Didácticas son nociones nucleares. Para Brousseau el estudio y control de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar de conocimientos. En esta tarea de producción de conocimientos da forma a la noción del contrato didáctico y a la teoría de las situaciones. Por la noción de contrato didáctico entiende "un conjunto de reglas, frecuentemente implícitas, que pesan sobre los alumnos y el profesor y que condicionan su trabajo" (Brousseau, 1987, p. 5). Refiere a un conjunto de acuerdos tácitos que determinan implícitamente lo que tanto el alumno como el maestro deben manejar y de lo que es responsable uno frente al otro. Es el medio en el cual se pone en escena lo que este autor llama la situación didáctica.

Según el autor, el estudiante sólo habrá adquirido verdaderamente el conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. A estas situaciones las llama a-didácticas y será el maestro el responsable de determinar y presentar al estudiante las que estén a su alcance. En tanto que la situación didáctica es aquella más amplia en que el profesor se encuentra implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le plantea, donde comunica, o se abstiene de comunicar, según sea el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje.

Por su parte, la teoría de la transposición didáctica apunta al análisis de los procesos que, a partir de los saberes de referencia y principalmente aquellos productos legitimados por la institución matemática "sabia", conducen a los objetos de enseñanza que viven cotidianamente en las clases. Y ella busca, más allá de tal o cual estudio particular, poner en evidencia ciertas leyes y regularidades en estos procesos transpositivos complejos. Yves Chevallard acuña la noción de Transposición Didáctica para referirse al proceso de transformación que experimenta un objeto del saber matemático establecido por la comunidad matemática con el propósito de constituirlo en objeto de enseñanza de matemática.

Este autor plantea una "reconceptualización" de lo didáctico sobre la base de un conjunto de nociones esenciales, a saber: objeto, sujeto, institución, y relación personal e institucional a un objeto (Chevallard, 1992). Con su nueva articulación conceptual amplía los marcos teóricos que toman a la matemática como sistema conceptual o como lenguaje, propugnando el estudio de la actividad matemática entendida como una actividad humana entre las demás. Para estudiar al hombre haciendo matemáticas se debe partir de lo antropológico para analizar la emergencia de lo matemático. Ningún registro de la actividad humana -matemático u otro- está limitado, ni definido de una vez por todas de manera autónoma e independiente del resto de las actividades sociales, esto es, la especificidad de lo matemático, y de lo didáctico dentro de lo matemático, no se puede hallar únicamente dentro de lo matemático. Así las personas, las instituciones y los objetos forman asociaciones complejas que este enfoque nomina ecosistemas o universos de objetos. En esta línea plantea Cordero que "la epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento" (2001, p. 105), lo que implica "incorporar la dimensión social, reconocer categorías de conocimiento matemático con relación a las reconstrucciones de significados de la matemática que a priori no están en el currículo, romper el carácter universal de la construcción a través de considerar otras. Formular nuevas acciones didácticas en las que el diseño de situaciones está sustentado por la actividad humana" (2001, p. 105).

En este marco de atención a la actividad humana, la propuesta de sensibilidad a lo ostensivo en matemática de Bosh (1994) alerta a que el sujeto recibe sus "maneras de hacer" de la institución y que ésta funciona a través de sus sujetos. Bosh introduce la noción de "objeto ostensivo" como uno

de los objetos de la actividad humana, distinguiéndolo de los restantes a los que llama "objetos no-ostensivos". Caracteriza a los primeros por tener una valencia semiótica y una valencia instrumental, esto es, ser portadores de un significado a la vez que posibilitar el desarrollo de una tarea y que, por ende, en tanto instrumentos para la actividad matemática pueden condicionar tanto su desarrollo como su gestión. Por su parte, los niveles interdependientes de lo sintáctico, lo semántico y lo pragmático -afirma- "permiten afinar el análisis de la dialéctica entre lo ostensivo y lo no-ostensivo en la actividad matemática" (ob. cit. Bosh, p. 62). Por medio de la presentación y aplicación en su trabajo del "análisis ostensivo" establece la necesidad de relevar el fenómeno de la sensibilidad de las técnicas a lo ostensivo en la relación a lo matemático, y más aún, la sensibilidad de la cultura didáctica a la dimensión ostensiva de la actividad matemática.

Colindando con estos desarrollos, Arrieta (2003) toma a las prácticas sociales de modelación como epistemologías para el diseño de secuencias de enseñanza e identifica a las herramientas ostensivas de las prácticas sociales de "la figuración del devenir de las cualidades" que inician con Oresme y aquellas de "la numerización de los fenómenos" que llegan con las actividades experimentales realizadas por Galileo, ilustrando así un fértil campo de desarrollos didácticos.

En un enfoque de raíces cognitivas y antropológicas, Duval complementa las miradas de indagación para la intervención de los fenómenos didáctico-matemáticos. En su aproximación teórica de los registros de representación semiótica, se propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. El foco de su indagación es por el tipo de estructura cognitiva implicada en la actividad matemática.

Para Duval (1993) el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados, a saber, la diversificación de registros, la diferenciación entre representante y representado y la coordinación entre registros. En los estudios psicológicos sobre la adquisición del conocimiento o sobre sus transformaciones, distingue tres formas de presentar la noción de representación; estas son: mental, computacional y semiótica. Esta última se caracteriza por ser una representación de tipo consciente y externa y, como tal, cumple las funciones cognitivas de comunicación, objetivación y tratamiento. En términos de Arrieta (2003) diríamos que tales representaciones semióticas son herramientas con las cuales el estudiantado ejerce prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad, cristalizando con ello en aprendizajes significativos.

Duval, en consecuencia, propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. No es posible lograr esta articulación con una ejercitación de convertibilidad de casos típicos de representaciones, por una parte, debido a que están los casos de representaciones no-congruentes, y por otra, a que la conversión de las representaciones requiere de la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Para dicha articulación entonces, se hace necesaria la discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, problema que Duval considera "debe ser el objeto de un aprendizaje específico", a fin de establecer las reglas de correspondencia semiótica entre cada registro.

Los registros de representación semiótica son aquellos sistemas semióticos que cumplen con las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, es decir: constituir un conjunto de marcas identificables como una representación de alguna cosa en el sistema; transformar las representaciones de acuerdo con reglas propias de modo de constituir otra representación y así ganar conocimiento con respecto a la primera, y convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema. Estas tres actividades corresponden a las actividades de formación, tratamiento y

conversión. Un estudio de los aprendizajes fundamentales debe tener en cuenta: la diversificación de los registros: la diferenciación entre representante y representado, y la coordinación entre los registros.

Adicionalmente, la Teoría Psicológica de los Campos Conceptuales de Vergnaud, atiende a un principio de elaboración pragmática del conocimiento. Como teoría psicológica del proceso de conceptualizar lo real, apunta a localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; a analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y a indagar en las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; así como a explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).

Para teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas considera el sentido de situaciones y de símbolos, la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta. La ilustran los ejemplos de los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra. Como teoría psicológica del proceso de conceptualizar lo real apunta a: (a) Localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; (b) Analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; y (c) Explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).

Aclara el autor: "Estas distinciones de esquemas y conceptos, invariantes operatorios de concepto en acto y de teorema en acto, son indispensables para la didáctica porque la transformación de conceptos-instrumento en conceptos-objeto es un proceso decisivo en la conceptualización de lo real. Esta transformación significa entre otras cosas que las funciones proposicionales puedan devenir argumentos. La nominalización es una operación lingüística esencial en esta transformación" (ob. cit., p. 144 ). Y añade: "no se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sin la ayuda de categorías del conocimiento explícito: proposiciones, funciones proposicionales, objetos-argumento (...)". En suma señala: "Un acercamiento psicológico y didáctico a la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto recurre al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y al conjunto de esquemas puestos en acción por los sujetos en esa situación" (ob. cit. p. 145).

## La Didáctica Fenomenológica de las Matemáticas.

Siempre en Europa continental (Holanda y Bélgica) toma cuerpo otro enfoque matemático didáctico apoyado en las reflexiones del matemático holandés Hans Freudenthal. En esta perspectiva se indaga en torno a los fenómenos más allá y más acá de objetos y procedimientos matemáticos. Freudenthal afirma que la explicación y la explicitación de la didáctica en la cual se ha apoyado la enseñanza tradicional, es la justificación de la enseñanza de una teoría: paradigma tradicional de enseñanza de las matemáticas. Idea clave para el autor es la oposición de dos concepciones de la enseñanza de la matemática: la que concibe a las matemáticas como un producto en oposición a esa otra que las concibe como una actividad. En esta última visión el acento está puesto sobre el proceso requerido para su aprendizaje.

El análisis de las matemáticas como una actividad presenta un sistema de "capas" en tanto que el análisis que ve las matemáticas como un producto terminado presenta más bien una estructura deductiva. En este último lo que interesa es la adquisición de conceptos. A juicio del autor, en el enfoque de adquisición de conceptos, la concretización de los conceptos es transitoria y olvidada por los estudiantes. El primer enfoque favorecerá una didáctica de la matemática como organización de fenómenos y constitución de objetos mentales: "En mi terminología, la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o de una idea matemática, significa el hecho de describir ese *noumeno* (objeto mental) en relación con los *phainomens* que él permite organizar y a

los cuales puede ser extendido; describir la manera como el objeto mental actúa sobre esos fenómenos en tanto instrumento organizador, y describir de qué poder nos dota para manejar, manipular esos fenómenos" (Freudenthal, 1983). Así entonces, la didáctica fenomenológica propone una organización de fenómenos con el fin de enseñar a los estudiantes a manipular los significados de esa organización, resultando una matemática estrechamente ligada a la experiencia.

En particular, desde su trabajo de investigación en el Grupo de Enseñanza Matemática (G.E.M.) y en el marco de la didáctica fenomenológica, el matemático belga Nicolás Rouche acuña como consigna central: "aprender matemática es construir un saber en la cantera de los problemas". A su juicio, la construcción del saber se hace en forma progresiva. Partiendo desde contextos y nociones cotidianas, los conceptos iniciales vuelven a aparecer en nuevos contextos y situaciones. Este proceso permite que las primeras nociones vayan evolucionando y progresando en su construcción. El conocimiento no se presenta como definitivo, cada vez que reaparece presenta nuevas facetas, se enriquece, complejizándose.

En este enfoque: (a) El maestro propone una sucesión de problemas que va a alguna parte; (b) El estudiante aprende conceptos matemáticos franqueando "umbrales epistemológicos", evolucionando de modo dialéctico desde contextos familiares con nociones cotidianas a temas matemáticos (constituidos de axiomas y teorías); y, (c) La teoría emerge con un carácter instrumental: cada etapa de este proceso de aprendizaje en espiral, provee elementos teóricos a la vez que usa de los ya construidos en una etapa anterior. En suma, para este enfoque, superar el umbral epistemológico mediante la resolución de problemas es hacer matemáticas en forma profunda, ya que, más que la adquisición teórica, aporta una experiencia que es utilizable en actividades matemáticas posteriores y transferible a otros campos.

La didáctica científica de la matemática desde el enfoque socioepistemológico. El doble proceso de desarrollo que se nutre, por una parte, de la reflexión matemática al seno de lo didáctico y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción -social e individual- del conocimiento, ha sido una de las principales y más recientes contribuciones de la Matemática Educativa a la didáctica científica de la matemática (Cantoral y Farfán, 1998). Esta línea de investigación de origen latinoamericano, toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las epistemologías de los estudiantes y docentes, con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar.

Esta disciplina estudia los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. No se reduce a la búsqueda de una "buena manera" de enseñar una cierta noción fijada previamente, sino que asume como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber aunque este objetivo no sea alcanzado. La investigación se propone afectar positivamente al sistema didáctico; mejorar los métodos y contenidos de enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de tales sistemas. En suma, busca tener una mayor gestión de las regularidades del funcionamiento de las situaciones de enseñanza, de modo que no sólo trata con la matemática como un tema escolar, sino también, quiere entender cómo y por qué se aprende, y cómo y por qué se estructura el conocimiento con fines didácticos.

Este enfoque didáctico socioepistemológico concibe a la matemática como actividad humana, como un producto cultural; construcción humana que no está exenta de ires y venires, de nociones que se incorporan paulatinamente a una estructura formal, luego de pasar por etapas de formulación y consenso. resultado de inquietudes socio-culturales, en marcos de paradigmas determinados. Se mira a las personas y la sociedad haciendo matemáticas. construyéndolas, difundiendo y aprendiéndolas. La problemática que estudia surge en el ámbito de la matemática escolar, aquella que se significa y resignifica en las aulas de los distintos niveles educativos. Explora "dislexias" intrínsecas a la enseñanza, a los aprendizajes así como a las nociones y procedimientos matemáticos en su deriva histórica, desde el marco de su gestión de aula. Especial atención pone en rastrear las nociones fundantes del discurso matemático, incluso antes de que éstas sean formalmente definidas -su prehistoria cultural- con el propósito de identificar hitos en su desarrollo, momentos relevantes,

significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que pudieran proporcionar bases o elementos para un posterior diseño de una situación didáctica que mejore logros de aprendizajes significativos. Ello es complementado por el estudio de los saberes culturales que portan los protagonistas del aula, estableciendo facetas de éstos que concurren con sus sentidos a favorecer u obstaculizar los aprendizajes. Con tales elementos se validan propuestas de enseñanza robustas en las que cristalizan diálogos empáticos de epistemes que confluyen al aula de matemáticas.

### **Los obstáculos, noción transversal a la didáctica científica de la matemática.**

El profesorado observa en las producciones de sus estudiantes ideas o contenidos a los que rotula de erróneos toda vez que son distintos de aquellos del currículum explícito que ellos procuran poner en la escena del aula. Este hecho sostuvo por un buen tiempo programas de investigación didáctica que se abocaron al estudio de las "mixconceptions", preconcepciones o ideas previas de los estudiantes, en el marco del paradigma del cambio conceptual en la didáctica de la ciencia, el que se abandona progresivamente en tanto se va produciendo un enriquecimiento persistente de marcos teórico-didácticos. De analizar los errores en las producciones estudiantiles, se desliza el foco de las indagaciones a los contenidos que se resisten a los entendimientos estudiantiles. A partir de la década de 1980, la noción de obstáculo se instala en la investigación didáctica para colaborar en la búsqueda de respuestas al porqué tales contenidos se revelan resistentes al entendimiento de los estudiantes. Establece la noción de obstáculo epistemológico el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard (1938, citado en Díaz, 1999) en su texto "La formación del espíritu científico". Allí puntualiza: "es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas de estancamiento y hasta de retroceso, es allí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos" (p. 15). Por su parte, la incorporación de la noción de obstáculo en la didáctica de las matemáticas se inicia con la presentación de G. Brousseau en el congreso de la CIEAEM (1976), en Louvain la Neuve. Más adelante el autor discute y examina nuevamente la noción de Obstáculo Epistemológico, contribuyendo al debate sobre las relaciones entre la didáctica y la epistemología de la matemática, precisando que los estudios sobre la base de las concepciones de Bachelard muestran que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que les hizo jugar hasta ese momento la didáctica. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. Esto es, la identificación y caracterización de un obstáculo, son esenciales a los análisis para favorecer aprendizajes. Brousseau transfiere y amplía la noción distinguiendo obstáculos: (a) de origen ontogénico que se ligan a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos involucrados en una enseñanza; (b) de origen didáctico para los ligados a las elecciones del sistema de enseñanza; y (c) de origen epistemológico, para los obstáculos ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, es decir los obstáculos en el sentido original que le daba Bachelard. Sierpiska (1985, citada en Díaz, 1999) retendrá dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de G. Bachelard, su carácter inevitable -son necesarios para continuar con el desarrollo del conocimiento- y el que su aparición se repite tanto en la filogénesis como en la ontogénesis de los conceptos. Y, para Artigue (1990, citado en Díaz, 1999), lo que fundaría de alguna manera los obstáculos epistemológicos en la didáctica de la matemática, es por una parte, su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos en cuestión, y por otra parte, la observación de concepciones análogas en los alumnos. Estos no se constituyen con solo certificar la resistencia de esas concepciones en los alumnos actuales. Los nudos de resistencia severa en los estudiantes hoy corresponden a menudo a los puntos en los que un obstáculo de origen epistemológico histórico interviene, reforzado por un obstáculo de origen didáctico. Díaz (1999) reporta otra fuente concurrente a esos nudos, los obstáculos socioculturales, con los que refiere a una polifonía de voces portada por el estudiantado y que entra a competir con la voz escolar que propone enseñar el currículum bajo una misma denominación. Son cuerpos de conocimientos que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas estudiantes y

profesores, y que manifiestan gran resistencia a su modificación, nociones cotidianas que están jugándose inconscientemente como obstáculos en el entendimiento de los estudiantes de nociones matemáticas escolares.

## **Una metodología de investigación en didáctica científica de la matemática: La Ingeniería Didáctica.**

El término de Ingeniería Didáctica (ID) surge en el seno de la escuela francesa, a inicios de la década de los ochenta, analogando al quehacer en ingeniería, en tanto que este no sólo se realiza apoyándose en resultados científicos sino que involucra también una toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. En términos de Artigue (1995): "En los años ochenta esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales, dado el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas en la época: las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza y el papel que conviene hacerle tomar a las 'realizaciones didácticas' en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica" (p. 34). "Ella [I.D.] llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (p. 36). En tanto producciones para la enseñanza, se constituye en una forma de trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero, quien, apoyándose en sus conocimientos científicos de su dominio y aceptando el control de la teoría, se encuentra obligado a trabajar con objetos más complejos que los objetos puros de la ciencia y gestionar entonces, problemas de los cuales la ciencia -investigación didáctica matemática- no quiere o no puede hacerse cargo.

Sus propulsores distinguen cuatro fases temporales en la metodología de la ID, a saber: (i) análisis preliminar; (ii) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; (iii) experimentación; y, (iv) análisis a posteriori y evaluación. Ilustraciones fundantes son las tesis de G. Brousseau (1986) y de R. Douady (1984). Incorporando facetas de la escuela latinoamericana, destacan las tesis de Ferraris (2002) y Arrieta (2003).

Sobre la base de esta revisión de hitos principales del desarrollo de la didáctica de las matemáticas es que entendemos a las matemáticas como una actividad humana en donde cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas y no sólo el producto matemático. Desde esta mirada resulta relevante considerar -en la praxis educativa- las negociaciones y búsqueda de consenso, entrelazadas éstas con las acciones cognitivas de los estudiantes al momento de enfrentarse a la resolución de un problema, pasando por etapas de acción, formulación y validación de sus construcciones de estrategias y conocimientos matemáticos. El conocimiento científico es una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Por su parte nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental. Consideramos que son ejes articuladores necesarios de la formación en pensamiento matemático a los pensamientos geométrico, numérico, algebraico, de medida y variacional. Desde el foco de este último, que se ocupa de aquellas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio, permitiendo predecir y controlar estados futuros, cobra especial importancia que los docentes incorporem a los estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan su construcción de unas "matemáticas vivas"<sup>1</sup> y, al mismo tiempo,

---

<sup>1</sup> A contrapelo de la vorágine de cambios en las que se hallan inmersos los jóvenes, como en un huracán, se preguntan escépticos: ¿qué puede cambiar en matemáticas? O, sorprendidos: ¿qué se puede investigar en matemáticas? Nuestro estudio, sobre la base de sus textualidades, constata cómo una disciplina que trabaja con la cuantificación de cambios, ni se avizora en el horizonte de sus representaciones. Se la representan como contenidos fósiles que se traen al aula generación tras generación o como una obra terminada (Informe Proyecto Fondecyt N°1030413).

que tengan una experiencia de primera mano sobre la complejidad puesta en juego en su actividad, en situación escolar, a fin de reconocer y valorar el uso de herramientas matemáticas que traen a escena en sus elaboraciones personales y a la vez en aquellas del trabajo colectivo, enfrentados a comunicar sus hallazgos en ambientes interactivos de aula.

### **De la investigación sobre el profesorado.**

¿Cómo aprenden los profesores? Los resultados de investigaciones, avalados por indicadores, están señalando que los procesos de formación y actualización docente -como parte de una actitud de aprender a enseñar para y durante la vida profesional- son más complejos que lo que se les considera en las intervenciones más recurridas. Al respecto señala Marcelo (2002): "Los cambios en la forma de aprender, que afectan a los profesores en ejercicio, están acentuando la idea de que la responsabilidad de la formación recae cada vez más en los propios profesionales. Hacer de nuestras escuelas espacios en los que no sólo se enseña sino en los que los profesores aprenden, representa el gran giro que necesitamos (...) Que supere el tradicional aislamiento que caracteriza a la profesión docente. Una formación que consolide un tejido profesional a través del uso de las redes de profesores y escuelas y que facilite el aprendizaje flexible e informal. Una formación en definitiva que contribuya a reprofesionalizar la docencia frente a aquellos que pretenden simplificar la complejidad del acto de enseñar". Marcelo (op. cit.), refiriendo a Blumenfeld (1998), cita: "Los cambios en los profesores no pueden hacerse al margen de cómo se comprende el proceso de aprendizaje de los propios profesores". La agenda de investigación debe responder a ¿cómo se aprende a enseñar? y ¿cómo se genera, transforma y transmite el conocimiento en la profesión docente? En un mismo sentido Edwards (1992), respecto del perfeccionamiento docente, señala: "La prescindencia del análisis de las formas de aprender del propio docente y la no consideración de los procesos de aprendizaje de adultos es coherente con un rol docente centrado en la creación de situaciones de enseñanza, sin necesidad de comprender y preguntarse por las necesidades, deseos y procesos de aprendizaje de sus alumnos" (pp. 14-15). En suma, en la voz de estos especialistas, cobra importancia analizar los procesos de aprendizaje docentes para: (a) entender cómo se aprende a enseñar; (b) cómo se genera, transforma y transmite el conocimiento en la profesión docente; y, (c) propiciar que el profesorado configure ambientes de aprendizaje complejos, sobre la base de actividades fundamentadas, tendientes a que los estudiantes construyan su propia comprensión del material a estudiar, trabajando con ellos como compañeros en el proceso de aprendizaje.

¿Cómo piensa el profesorado? La indagación científica sobre el profesorado se remonta a la década de los setenta y prosigue hasta hoy. En su reseña Hurtado (2001) consigna el programa de Investigación del "Teaching Thinking" (Clark y Peterson, 1986), o "Paradigma de Pensamiento del Profesor", en tanto que prescribe un campo de investigación con unidades y problemas de investigación, y metodologías y técnicas de investigación. A 25 años concluye Hurtado (op. cit.) que -más que una teoría general- se generó una diversidad de investigaciones y conceptualizaciones sobre el pensamiento docente (teorías implícitas, creencias, toma de decisiones, constructos personales, esquemas de acción, entre otros) así como métodos y técnicas de investigación. Alternativas todas que parecieron operar bajo dos premisas básicas: que el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias relativas a su desarrollo y desempeño profesional. Y, por otro lado, que los pensamientos de los profesores, en alguna medida, guían y orientan su conducta. Desarrollos más recientes disienten de la pertinencia del modelo del procesamiento de información como del modelo de toma de decisiones, básicamente en lo que concierne a la pertinencia de asumir al profesor como un actor individual, poseedor de antecedentes internos (creencias, conocimientos...) y externos (expectativas de rol, indicios...) que lo determinan. Se nutren de enfoques de investigación que apuntan a la confluencia de niveles funcionales y relacionales del conocimiento, unos más centrados en el ámbito del conocimiento social y cultural (síntesis del conocimiento) y otros más centrados en el ámbito de las creencias y de las atribuciones personales

(síntesis de creencias) para interpretar el pensamiento del profesorado (Esteban, Arís, Arbós y Vidal; 2003). Algunos con sustento en explicaciones fenomenológicas del conocimiento que señalan que éste “se relaciona con el hecho de estar en un mundo que resulta inseparable de nuestro cuerpo, nuestro lenguaje y nuestra historia social” (Varela, p. 95).

¿Cómo aprende a enseñar el profesorado? Marcelo (op. cit.) considera un esquema conceptual de tres dimensiones en orden a “comprender la amplitud, complejidad y posibilidades de la investigación sobre aprender a enseñar”. La primera dimensión refiere a las fases formativas del profesorado, a saber, una formación inicial; una segunda fase constituida por los primeros años de enseñanza -años de iniciación, inducción o inserción profesional-; y, una tercera fase, de análisis del proceso de aprender a enseñar para aquellos “profesores que han generado su propio repertorio profesional y que avanzan a través de experiencias de desarrollo profesional”. La segunda dimensión alude a los temas, entre los cuales el autor distingue ocho en orden a clasificar la investigación, siguiendo a Katz y Rath (1985). Ellos refieren a: los profesores -sus conocimientos, creencias, disposiciones, actitudes, autoeficacia percibida, entre otros-; los contenidos de la formación; los métodos y estrategias formativas; los formadores de profesores; las prácticas; el ambiente, y la evaluación. La tercera, alude a los enfoques ya sea cuantitativos o cualitativos con que los investigadores abordan los distintos temas. La investigación sobre aprender a enseñar, desde la perspectiva de las relaciones entre el conocimiento que se produce y su aplicación en la práctica de la enseñanza, diferencia entre conocimiento en, de y para la práctica (Marcelo, citando a Cochran-Smith y Lytle, quienes siguen la idea de Fenstermacher). El conocimiento para la práctica entiende que el conocimiento sirve para organizar la práctica, y por ello, conocer más (contenidos, teorías educativas, estrategias instruccionales) conduce de forma más o menos directa a una práctica más eficaz. En esta concepción el conocimiento para enseñar es un conocimiento formal y la práctica tiene que ver con la aplicación de ese conocimiento formal a las situaciones prácticas. Por su parte, el conocimiento en la práctica pone el énfasis de la investigación sobre aprender a enseñar, indaga por el conocimiento en la acción toda vez que concibe que el conocimiento docente está implícito en la práctica, en la reflexión sobre la práctica, en la indagación práctica y en la narrativa de esa práctica. Este conocimiento se adquiere mediante la experiencia y la deliberación y los profesores aprenden cuando tienen oportunidad de reflexionar sobre lo que hacen. Desde esta perspectiva la enseñanza sería una actividad incierta y espontánea, contextualizada y construida en respuesta a las particularidades de la vida diaria en las escuelas y las clases. Y, por último, el enfoque cualitativo del conocimiento de la práctica es cercano al movimiento denominado del profesor como investigador. Este enfoque sostiene que en la enseñanza no tiene sentido distinguir entre un conocimiento formal y otro práctico, sino que el conocimiento se construye colectivamente dentro de comunidades locales, formadas por profesores trabajando en proyectos de desarrollo de la escuela, de formación o de indagación colaborativa. Desde nuevos enfoques del conocimiento y la cognición, cobra especial relevancia asumir perspectivas transversales de indagación, esto es, que contemplen al profesorado en contexto y en la complejidad de sus procesos de aprendizaje y de enseñanza. Consecuentes con señalamientos sobre la construcción social y personal de saberes y con miradas actuales de la cognición, los profesores deben tener oportunidades de aprender por la colaboración y la reflexión en la actividad. Actividad que considere espacios y tiempos para la puesta en escena de sus saberes y la reflexión de los mismos.

Ejes para la formación de profesionales de la enseñanza de la matemática en los niveles básico, medio y superior. Favorecer la profesionalización del pedagogo sobre la base de tres distinciones centrales: como pedagogo, como profesional reflexivo y como ingeniero didáctico. Estas distinciones tienen un carácter analítico, con la finalidad de llamar la atención sobre aspectos que deberán estar presentes tanto en su formación inicial como en su desarrollo profesional ulterior. Conceptualizar a los profesores de matemáticas como pedagogos en vistas a que su principal función, a diferencia de otros educadores como padres de familia, conductores religiosos o líderes sociales, es la de contribuir sobre bases científicas al aprendizaje matemático del estudiantado. Se trata de entender

al pedagogo como aquel sujeto capaz de configurar un espacio donde pueda poner a disposición de sus estudiantes saberes matemáticos que le permitan explicarse y actuar en el mundo, significándolo, resignificándolo, cambiándolo desde su propia estructura cognitiva y actividad. Ejerciendo una mediación entendida en el marco del concepto de "zona de desarrollo próximo" configurado por Vygotsky. Esta mediación supone como condición básica el dominio, por parte del pedagogo, del saber matemático que debe trasponer para su enseñanza en el aula. Así, el profesor como pedagogo es aquel profesional capaz de asumir el rol de mediador de los aprendizajes a partir del dominio de la episteme de la disciplina y su transposición didáctica, poniendo a disposición de otros, de modo interactivo, saberes relativos a los pensamientos matemáticos antes referidos para los ciclos básico y medio –geométrico, numérico, algebraico, de la medida y variacional-, y saberes matemáticos específicos relativos a perfiles profesionales en el tercer ciclo, impulsándole a construir nuevos aprendizajes fruto del aprendizaje compartido. En esta dinámica se nutre y perfecciona a sí mismo, a partir de la experiencia y práctica pedagógica, transformándola en saber pedagógico. Este profesor pedagogo, que facilita a sus estudiantes experiencias de interacción para que construyan aprendizajes significativos y que reflexiona personal y colectivamente –con sus pares o con otros profesionales- sobre su propio trabajo para enriquecer su saber pedagógico, se constituye en un profesional en tanto posee un conocimiento especializado que legitima la racionalidad de sus diagnósticos y sus prácticas pedagógicas; se hace responsable de sus acciones y de las consecuencias de aquellas. Estas condiciones son posibles de desarrollar en un espacio de autonomía creciente y cuya manifestación se materializa en innovaciones que introduce en sus prácticas, contribuyendo a superar aquellas rutinas que tienden a fosilizar su actividad pedagógica. Desde la autonomía organizativa y pedagógica, el profesor ejerce una profesión innovadora, que produce en su desarrollo, satisfacciones individuales y colectivas, con una metodología de trabajo colectivo, basada en la creación de formas de organización cooperativa, tanto a nivel de formación permanente –en el perfeccionamiento en los propios centros educativos- como en la práctica docente. De esta manera, el profesor innovador debe ser capaz de generar su propio autodesarrollo profesional; es decir, desarrollar su autonomía, a través de un proceso de reflexión, que le permita comprender el cómo y el porqué hace lo que realiza en su práctica pedagógica, transformando aquella reflexión en la base de sustentación para su mejoramiento. La reflexión connota la idea de investigación en la acción; de transformar la práctica pedagógica en un campo de experimentación y de renovación metodológica en forma permanente, de discutir y contrastar con sus pares en igualdad de condiciones, labores e innovaciones en el campo de la didáctica; lleva a desesquematar la enseñanza y a transformar la sala de clases en un laboratorio o taller de aprendizajes. El intercambio de experiencias se sitúa en el plano de compartir experiencias sobre el hacer pedagógico. Esta reflexión constituye la base de construcción del Saber Pedagógico. En suma, un pedagogo que adquiere una mayor autonomía profesional, considerada principalmente desde una perspectiva comunitaria, centrada más en la unidad educativa como conjunto que en relación a los profesores individuales. Por último, la ID será una herramienta metodológica en la construcción de saber didáctico matemático situado en el aula, para el profesor como ingeniero didáctico, en un contexto que exige de esta profesión, de modo creciente, la incorporación de nuevas racionalidades de comunicación -inter e intra comunidad educativa- con soporte informático, a la vez que la incorporación en el aula, de medios y materiales con soporte computacional, didácticamente fundados y debidamente validados. Esto último lo favorece el planteo recursivo, que es a su vez, indagativo y también de desarrollo y de implementación, de la ID, tanto a nivel de aula como del profesorado de matemáticas y de la comunidad de investigadores en educación matemática. Ello proveerá de un acopio de diseños didácticos científicos en los que se aprende por la actividad, matemáticas significativas por parte del estudiantado y se profesionalizan los docentes en los distintos ciclos del sistema así como se vinculan con la comunidad de investigadores.

## Bibliografía

- Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.
- Artigue, M. (1995). La Enseñanza de los Principios del Cálculo: Problemas Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos, Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, P. Gómez (ed.), Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.
- Ávalos, B. (2002). Profesores para Chile, Historia de un Proyecto. Mineduc. Santiago de Chile.
- Ávila, J. (2005). Representaciones estudiantiles de variación desde mediaciones pedagógicas. Tesis de Maestría. México: CICATA-IPN.
- Block, J.L. y Hazelip, K. (1995). Teachers beliefs and belief systems. En Lorin W. Anderson, International Encyclopedia of Teaching and teacher Education, 2ª.ed. Oxford: Pergamon.
- Blumenfeld, P. et al. (1998). Teaching for Understanding En B. Biddle et al. (Eds.). International Handbook of Teachers and Teaching, London, Kluwer, pp. 819-878.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En Actas del XXVIII C.I.E.A.E.M., Louvain la Nueve, pp 101-117.
- Brousseau, G. (1987). Fundamentos de Didáctica de la Matemática, Texto base en los créditos de 3er ciclo impartidos por el profesor Brousseau, Programa de Doctorado de la Universidad de Zaragoza. Traducción de las profesoras Centeno J. y Melendo, B. y el profesor Murillo, J.
- Carrasco, E. (2006). Visualizando lo que varía. Tesis de Maestría, México: CICATA-IPN.
- Cantoral, R. (luglio, 1999). "La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: un programa emergente". Artículo publicado en La matemática e la sua didattica, periodico trimestrale, 3. Pitagora Editrice, Bologna.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, Una Mirada Socioepistemológica. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9. México.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime Vol. 4. Núm. 2, pp. 103-128.
- Díaz, L. (2004). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I, pp. 10-20. México.
- Díaz, L. (2003). Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos. Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.
- Díaz, L. (2003). Reflexión de nuestras Epistemes como Eje Transversal en Procesos de Estudio de Matemática Educativa. Ilustraciones. En ALME, Vol. 16. Santiago de Chile.
- Díaz, L. (junio, 2002). "Hacia la Construcción de Saberes Matemáticos en el Aula. Enfoques Didácticos de Investigación". En Revista Pensamiento Educativo. Facultad de Educación. PUCCH. Jul 2002.
- Díaz, L. (1999). Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos. Tesis Doctoral en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
- Edwards, V. (1992). Hacia la construcción del Perfeccionamiento docente. En Informe del Seminario Cómo aprende y cómo enseña el docente. Santiago de Chile:PIIE
- Esteban, Arís, Arbós y Vidal (oct-nov 2003). Y los que enseñan, ¿qué piensan? Estudio sobre el pensamiento del profesorado de magisterio de la Universitat Internacional de Catalunya sobre la

- formación de estudiantes del siglo XXI. En [www.oei.es](http://www.oei.es). Monografías Virtuales, N° 3.
- Hurtado, E. (2001). El profesor y la innovación con computación. Apartado de su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Marcelo, C. (2002). Aprender a Enseñar Para la Sociedad del Conocimiento. En Education Policy Analysis Archives Volume 10 Number 35 agosto 16, 2002 ISSN 1068-2341, <http://epaa.asu.edu>.
- Schön, D. (1992). La Formación de Profesionales Reflexivos. Madrid: Paidós.
- Soto, I. (1993). La Didáctica Fenomenológica propuesta por H. Freudenthal. Santiago: CIDE.
- Varela, F. (1990). Conocer. Ed. Gedisa, Barcelona.
- Wertsch, J. (1993). Voces de la mente. Un enfoque socio-cultural para el estudio de la Acción Mediada. Madrid: Visor Distribuciones.