

# Estructura de resolución y grados de complejidad en problemas aritméticos para el desarrollo de la capacidad analítica en educación básica<sup>(1)</sup>

Pedro Menares Álvarez\*, Adriana Martín F.\*, Edwin Salazar P.\*, Marcela Bobadilla G.\*

## Resumen

En este artículo, de acuerdo a los contenidos matemáticos que se deben aplicar en la resolución de los problemas numéricos, los clasificamos en tres categorías: aritméticos, algebraicos y superiores. Luego se revisa el potencial educativo del proceso de resolución de los problemas numéricos y se establecen los componentes cognitivos que determinan las dimensiones en donde se puede centrar la dificultad de un problema numérico. Esto nos permite definir operacionalmente los problemas numéricos que se pueden utilizar para planificar un desarrollo sistemático de la capacidad de razonamiento de los estudiantes.

Postulamos que al asociarle un símbolo a cada habilidad cognitiva que se debe manifestar en la resolución de un problema aritmético, es posible construir un diagrama que represente la estructura de su resolución. Y finalmente, mediante las operaciones principales y secundarias que se deben realizar al resolver el problema, demostramos que es posible asignar, sin ambigüedad, un grado de complejidad y un nivel de dificultad a los problemas de razonamiento.

## Palabras claves

Componentes cognitivos, dificultad de un problema, estructura de resolución, operaciones principales, operaciones secundarias, grado de complejidad, educación básica.

## Abstract

The mathematical background implied in the resolution of numerical problems can be classified in the three following categories: arithmetics, algebraic and higher concepts. The process of the resolution of a problem itself is analyzed as an educational tool; the cognitive components of the resolution process are established, so we can define operationally the type of numerical problem that can be useful, to stimulate a systematic development of the student's reasoning capacity.

We propose to associate a symbol to each type of knowledge that is actually used in the resolution of an arithmetic problem; after that a diagram can be made, representing the symbolic structure of the whole resolution. Finally, by means of the main and secondary operations needed to the resolution of the problem, we propose that it is possible to assign precisely a degree of complexity and a level of difficulty, to the different reasoning problems.

**Key words:** Knowledge components, problem difficulty; problem resolution structure; main processes; secondary processes; degree of complexity; primary school.



\* Académicos del Departamento de Física de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación / pmenares@umce.cl / Chile.  
 (1) Artículo originado en el proyecto de investigación DIUMCE 2002 "Desarrollo de habilidades cognitivas y estrategias de aprendizaje".

## Antecedentes

El problema que orienta esta investigación, es que no se ha establecido una metodología que permita desarrollar sistemáticamente las capacidades de análisis e integración en los estudiantes de la educación básica y media, y el hecho que tampoco existe un instrumento validado que nos permita medir el nivel de desarrollo de la capacidad de razonamiento en que se encuentra un alumno.

La utilización de problemas numéricos en las asignaturas de matemática y física nos plantea las siguientes preguntas de investigación ¿Es el proceso de resolución de problemas un recurso educativo eficaz para desarrollar las capacidades de análisis e integración en los estudiantes de la educación básica y media? ¿Cuáles son los criterios o elementos de juicio que utilizan los profesores de matemática y física para calificar un problema como: elemental, fácil, simple, complejo, difícil, muy difícil, selectivo, etc.?

Nuestro objeto de estudio es el "conjunto de problemas" que habitualmente se presentan, se desarrollan, o se analizan en dichas asignaturas, y el propósito de este trabajo es formular un convenio que permita establecer un patrón de medida para clasificar los problemas de razonamiento en diferentes grados y niveles de dificultad.

## Categorías de problemas

De acuerdo a los contenidos matemáticos y la operatoria que se debe aplicar en la resolución de los problemas numéricos, a estos los podemos clasificar en tres categorías:

- **Aritméticos**
- **Algebraicos**
- **Superiores**

Llamaremos **problema aritmético** a todo aquel en donde es posible obtener en forma independiente y secuencial los valores numéricos de las incógnitas parciales o finales del problema.

Un **problema algebraico** es todo aquel en donde no es posible obtener en forma independiente y secuencial los valores numéricos de las incógnitas parciales o finales del problema. En general, su resolución exige resolver un sistema de ecuaciones.

En la categoría de **problemas superiores** agruparemos a todos aquellos que en su

resolución se necesita aplicar contenidos de matemáticas superiores, como por ejemplo: derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones trigonométricas, cálculo vectorial, etc.

En cada una de las categorías definidas anteriormente, encontramos problemas que permiten evaluar el aprendizaje y la capacidad de aplicar contenidos específicos de diferentes áreas del saber, y constituyen un instrumento adecuado para evaluar el conocimiento y comprensión de las relaciones y conceptos involucrados en ellos. Pero, en dichas categorías también encontramos problemas de diferentes complejidades que para resolverlos de deben aplicar capacidades de razonamiento de distintos niveles de desarrollo.

Los problemas que se utilizan en la educación media son de las categorías aritmética y algebraica, pero en la educación básica los problemas que se pueden utilizar son sólo los de la categoría aritmética. ¿Cómo podemos definir e identificar dentro de la categoría aritmética los problemas que nos permitan desarrollar las capacidades de análisis e integración en los estudiantes de la Educación General Básica?

## Análisis del potencial educativo del proceso de resolución de problemas numéricos

Un estudiante al obtener el valor de las incógnitas de un problema específico, no solo exhibe el conocimiento de contenidos y el manejo de diversas habilidades intelectuales, sino que además las realiza en una secuencia que pone de manifiesto el estado de desarrollo de su capacidad de razonamiento. (Perales, 1993).

Para un estudiante, resolver correctamente un problema depende de tres componentes:

- La destreza y efectividad alcanzada en la operatoria matemática que se requiere aplicar. (Genyee, 1983).
- El conocimiento y comprensión de las relaciones y conceptos involucrados. (Johnstone, Kellet, 1980).
- El nivel de desarrollo de sus capacidades de análisis e integración. (Neto, 1991).

La resolución de problemas se utiliza generalmente como instrumento para evaluar

destrezas operatorias, el aprendizaje y comprensión de nuevos conceptos, y la capacidad de relacionarlos con otros conceptos conocidos anteriormente. (Reif, 1981). Esta multiplicidad de habilidades cognitivas que un estudiante debe aplicar y coordinar para resolver un problema, ha sido la justificación que hemos aceptado para utilizarlos como recurso pedagógico en el desarrollo de la capacidad de razonamiento. (Whimbey, Lochhead, 1993). Pero, es esa misma multiplicidad de habilidades que se deben aplicar la que dificulta el intento de definir grados o niveles de dificultad de los problemas.

De acuerdo a los componentes que intervienen en resolución de los problemas la dificultad podemos centrarla en cualquiera de ellas, y en consecuencia, la dificultad de los problemas que se utilizarán para el desarrollo del pensamiento, debe estar centrada principalmente en la dimensión analítica, es decir, en la capacidad para aplicar y relacionar conceptos conocidos anteriormente. En dichos problemas, los estudiantes no deberían encontrar dificultades en la operatoria matemática que se requiere aplicar, como tampoco en el conocimiento de los conceptos o contenidos específicos utilizados en aquellos. Los problemas que cumplan con las condiciones anteriormente mencionadas los llamaremos problemas de razonamiento.

El objetivo de este trabajo es, construir y formular un criterio para establecer diferentes niveles de dificultad entre los problemas de razonamiento de la categoría aritmética.

### Problemas elementales de la categoría aritmética

En todo problema aritmético se entrega el valor numérico de algunas magnitudes, y se pide calcular el valor numérico de otras. Si usando los datos y condiciones entregadas en el problema, el valor numérico de la incógnita final se logra obtener mediante la aplicación de una sola relación, entonces estamos hablando de un problema elemental o ejercicio de aplicación directa.

La complejidad de los problemas aritméticos aumenta cuando en su resolución se deben manifestar otras habilidades cognitivas, como por ejemplo: transformar unidades, interpretar informaciones verbales, representar el problema mediante una figura, extraer datos que se encuentran en tablas, gráficos o figuras, construir

diagramas, aplicar fórmulas, leyes o teoremas y realizar múltiples operaciones aritméticas.

Pensamos que al asociarle un símbolo a cada habilidad cognitiva que se debe manifestar en la resolución de un problema, es posible construir un diagrama que represente la estructura de resolución del problema. Lo que nos permite plantear las siguientes hipótesis de trabajo:

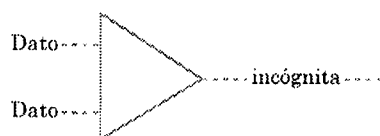
- Todo problema de razonamiento aritmético posee una estructura de resolución representable mediante un diagrama.
- La complejidad gráfica de dicho diagrama será una medida de la dificultad del problema.
- La dificultad de un problema, definida por su estructura de resolución, es una medida del nivel de desarrollo de la capacidad de razonamiento del estudiante que puede resolverlo correctamente.

### Estructuras de resolución de los problemas aritméticos.

Las habilidades intelectuales más comunes que se manifiestan en la resolución de problemas de la categoría aritmética, son:

- Operaciones aritméticas o resolución de ecuaciones lineales
- Transformaciones de unidades
- Obtención de datos en forma indirecta

**OPERACIONES ARITMÉTICAS:** cualquier operación aritmética que debamos realizar con los valores de dos magnitudes conocidas para obtener el valor de una magnitud incógnita, la llamaremos **operación principal**, la definiremos como la **unidad básica de complejidad** en la dimensión analítica de la resolución de un problema y la representaremos mediante un triángulo con tres trazos que nos indican las dos entradas y la salida:



**Ejemplo:**

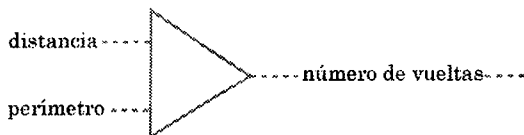
La rueda de una bicicleta tiene un perímetro de 1,5 m. Calcule el número de vueltas que da la rueda al avanzar 180 m.

Al aplicar la relación distancia de avance =  $n^\circ$  de vueltas por perímetro y designar por  $N$  al  $n^\circ$  de vueltas que da la rueda al avanzar los 180 m., podemos escribir  $180 = N \cdot 1,5$ .

Entonces,  $N = 180/1,5$  de donde se obtiene  $N = 120$ .

Llamaremos problema elemental o ejercicio directo a aquel en que para obtener el valor de la incógnita del problema solo se requiere realizar una operación principal. En este caso el diagrama de resolución del problema es el símbolo de la operación principal con las magnitudes correspondientes en las entradas y la salida.

Por ejemplo, el diagrama del problema anterior sería el siguiente:



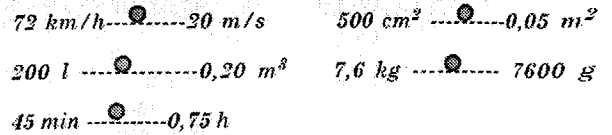
**TRANSFORMACIONES DE UNIDADES:** para calcular el valor numérico de una magnitud desconocida mediante la aplicación de una ley o de la definición operacional de un concepto, es necesario que las otras magnitudes involucradas en la relación estén expresadas en unidades compatibles. Por ejemplo, es muy común que el volumen se entregue expresado en litros, pero en la ecuación que se utilizará es necesario expresarlo en metros cúbicos. En el caso de la rapidez, es habitual entregar su valor en km/h, pero en muchos cálculos se la necesita en m/s.

Una transformación de unidades se representará mediante un disco con dos trazos:



$U$  corresponde al valor numérico de la magnitud con la unidad entregada y  $U^*$  corresponde al valor numérico de la magnitud en la unidad transformada.

**Ejemplos:**



**OBTENCIÓN DE DATOS EN FORMA INDIRECTA:** en algunos problemas en lugar de entregar como dato, directamente el valor numérico de una magnitud que se requiere, se entrega como información el valor de otra magnitud que está relacionada con la anterior mediante una ecuación sencilla o una condición determinante. Por ejemplo, en lugar de entregar el valor del volumen de un cubo se entrega el valor de la arista. En lugar del radio de una esfera se entrega su volumen, etc. Otra manera de obtener datos en forma indirecta es mediante la lectura de tablas, interpretación de diagramas, gráficos o figuras. La aplicación de estas habilidades se considera de dificultad superior a una transformación de unidades.

La obtención de un dato en forma indirecta se representará mediante un rectángulo y dos trazos.

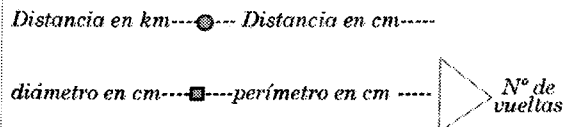


$D$  corresponde al valor numérico de la magnitud entregada y  $DI$  corresponde al valor numérico de otra magnitud obtenida de la anterior.

**Ejemplo:**

La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 60 cm. Calcule el número de vueltas que da la rueda al avanzar 1,2 km.

Un diagrama de resolución para este problema es el siguiente:



Las operaciones aritméticas que debemos realizar tanto en las transformaciones de unidades como en la obtención de datos en forma indirecta, las llamaremos operaciones secundarias.

## Grados de complejidad y niveles de dificultad

En la categoría de los problemas aritméticos definiremos el grado de complejidad de un problema de razonamiento como "el número de operaciones principales" que se deben realizar para resolverlo.

Las operaciones secundarias que se deben realizar al transformar unidades o al obtener datos en forma indirecta, no cambian el grado de complejidad del problema, pero si el nivel de dificultad, como se representa en la figura

COMPLEJIDAD	GRADO 1		DIFICULTAD
	GRADO 2		
	GRADO 3		
	GRADO 4		

Las operaciones secundarias solo definen diferentes niveles de dificultad dentro de un mismo grado de complejidad. Estas operaciones determinan la estructura fina de dificultad dentro de cada grado de complejidad.


## Conclusiones

- Todos los problemas de categoría aritmética que se utilizarán para desarrollar la capacidad analítica de los estudiantes deben poseer una estructura de resolución que se puede representar mediante un diagrama.

- Con el número de operaciones primarias y secundarias que se deben realizar en la resolución de un problema de razonamiento aritmético se puede establecer sin ambigüedad su grado de complejidad y nivel de dificultad.

- Con este convenio podemos jerarquizar un conjunto cualquiera de problemas de categoría aritmética y nos permite plantear las siguientes hipótesis de trabajo:

1. La complejidad gráfica de dicho diagrama será una medida de la dificultad del problema.

2. La dificultad de un problema de categoría aritmética, definida por su estructura de resolución, es una medida del nivel de desarrollo de la capacidad de razonamiento del estudiante que puede resolverlo correctamente. 

## Bibliografía

Genyee, J. Improving student's problem-solving skills. A methodological approach for a preparatory chemistry course. *Journal of Chemical Education*, 60, p. 478-481, 1983.

Johnstone, A., Kellet, N. Learning difficulties in school science: Towards a working hypothesis. *European Journal Science Education*, 2, [2], p. 175-181, 1980.

Neto, A. Factores psicológicos de insucesso na resolucao de problemas de física: uma amostra significativa. *Enseñanza de las Ciencias*, 9, [3], p. 275-280, 1991.

Perales, F. La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, [2], p. 170-178, 1993.

Reif, F. Teaching problem solving. A scientific approach. *The Physics Teacher*, 19, p. 310-316, 1981.

Whimbey, A., Lochhead, J. *Comprender y resolver problemas*. Madrid, 1993, Visor.

