LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL CONTEXTO DE LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Nelson Aravena C. (*)

Resumen

Este trabajo tiene por objeto investigar la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, usando la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Dicha teoría permite estudiar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos y las relaciones existentes entre ellos.

Palabras Claves: Concepto per se, Campo conceptual, sistemas de ecuaciones lineales, eliminación Gaussiana, enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

Abstract: This work has the object to investigate the teaching of the linear equations systems, using the theory of Vergnaud conceptual fields. Such theory permit to study the teaching-learning process of the mathematical concepts and the existing relations between them.

Key words: Concept per se, conceptual fields, simultaneous linear equations, Gaussian elimination, teaching of linear equation systems.

1. La naturaleza de los conceptos

El ser humano vive inmerso en un mundo de conceptos en lugar de objetos, acontecimientos y situaciones. La realidad, hablando en sentido figurado, se percibe a través de un filtro conceptual o de categorías; esto es, del contenido cognoscitivo que un grupo de palabras habladas o escritas provoca en el receptor de un mensaje, se recibe una versión muy simplificada, abstracta y generalizada de los hechos reales del mundo físico, a los cuales se refiere, y de las experiencias concientes y reales que tales hechos producen en el narrador. Cuando una persona dice por ejemplo que vio un "auto", no nos está comunicando verdaderamente su experiencia real, sino una versión simplificada y generalizada de el: una interpretación que refleja el consenso cultural relativo a los atributos esenciales de "auto". Su experiencia conciente y real del acontecimiento con respecto al tamaño, la forma, el estilo, el matiz y el costo probable, que el mensaje comunicado por el genérico término "auto". Si la persona antes citada tratase de comunicar en realidad su experiencia cognoscitiva detallada, necesitaría bastante tiempo, y aún así sería completamente incapaz de expresar muchos de sus matices más sutiles.

En resumen, debido a la influencia de los conceptos que se hallan en su estructura cognoscitiva, el hombre experimenta una representación conciente de la realidad, muy simplificada, esquemática, selectiva y organizada, en lugar de que tenga una imagen completa y sensorialmente fidedigna de ella. Esta representación simplificada y generalizada, alcanzada por la existencia y el empleo de conceptos, hace factible la invención de un lenguaje con significados relativamente uniformes para todos los miembros de una cultura, con lo que se facilita la comunicación interpersonal (Vygotsky, 1962). Tan importante como esto es lo que hace posible **el establecimiento de constructos inclusivos y genéricos en la estructura cognoscitiva** y de combinaciones proporcionales de ellos, en relación con los cuales se adquieren y retienen más eficazmente nuevos significados correlativos y derivativos, como parte de un cuerpo organizado de conocimientos, y la manipulación, interrelación y reorganización de las ideas que intervienen en la generación y comprobación de la hipótesis, en consecuencia en la resolución significativa de problemas (Ausubel, 1976).

Podemos definir a los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún signo o símbolo aceptado.

(*) Departamento de Matemáticas, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Ecuación UMCE / naravena umce.cl/Chile

Para Platón, los conceptos existen realmente, en un mundo **inteligible** superior al mundo que muestran los sentidos. Son las ideas perfectas, eternas, de las cuales las cosas visibles no son más que reflejos. Solo el mundo de las ideas es real, mientras el mundo sensible no es más que apariencia. Las cualidades de las cosas visibles no existen más que por **participación** de las ideas eternas. Nuestra alma prisionera del cuerpo, solo conocerá verdaderamente, totalmente, las ideas después de la muerte.

La noción implícita en la metafísica de la Grecia Clásica de que los significados conceptuales o **esencia** de las cosas están axiomáticamente dados y presentan una existencia aislada y concreta por derecho propio, aparte de los objetivos físicos de los cuales son esquematizados selectivamente, es actualmente insostenible científicamente. Como abstracciones los conceptos representan tan solo una de las muchas maneras posibles de definir una clase y no disfrutan de existencia real en el mundo físico. En términos psicológicos, sin embargo, los conceptos son reales en el sentido de que:

a) Pueden ser adquiridos, percibidos, entendidos y manipulados como si disfrutaran de existencia independiente por derecho propio, y

b) Son percibidos y comprendidos tanto denotativamente como en razón de sus funciones sintácticas, casi de la misma manera de una cultura a otra.

2. La teoría de los campos conceptuales

*"La noción de Campo Conceptual la introduce Vergnaud (1991) y la define del modo siguiente: un **Campo Conceptual** es una tripleta de conjuntos C = (Ş I, S) donde*

Ş: es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (el referente).

I : es el conjunto de invariantes en la que se basa la operatividad de los esquemas (el significado).

S : es el conjunto de formas lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (los significados)" (Chamorro, 1999).

Esta teoría de la psicología del desarrollo cognoscitivo, estudia los fenómenos didácticos de la enseñanza de la Matemática desde el interior del individuo, y proporciona un marco coherente, así como principios sólidos, para dar inicio al estudio del funcionamiento de los conocimientos de los alumnos. Además proporciona un modelo que permite estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos de las relaciones que existen entre ellos, y sobre todo de las relaciones existentes entre el contenido que se ha de enseñar y de las actividades de los alumnos dentro del aprendizaje significativo.

"Sólo un análisis a fondo del contenido puede proporcionar un esquema de organización de conceptos que de cuenta de la interdependencia entre unos y otros, poniendo de manifiesto la simultaneidad o prioridad de unos conceptos sobre otros. Un problema vital en didáctica consiste, precisamente, en determinar el orden (parcial, puesto que muchos conceptos se construyen de manera simultánea) en que los alumnos adquieren las nociones, y deducir en consecuencia la complejidad de éstas" (Chamorro, 1991).

En general, un mismo concepto aparece en una gran variedad de situaciones, de la misma forma que en una situación concreta coexisten varios conceptos diferentes, lo que obligaría, desde un punto de vista didáctico, a presentar los conceptos en relación con las distintas situaciones en que intervienen, evitando su presentación aislada.

Basándose en esta idea Gerard Vergnaud introduce la noción de **Campo Conceptual** definiéndola de la siguiente manera "Un Campo Conceptual es un espacio de problemas o de situaciones problemas cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión" (Vergnaud, 1981). Naturalmente los Campos Conceptuales están también relacionados entre sí.

Vergnaud se pregunta acerca de la naturaleza de los saberes constituidos y su descripción, así como la organización de los conocimientos en los alumnos, que tenga en cuenta la acción en situaciones, fuente formadora de conceptos. Además pretende, proporcionar un marco que permita comprender las dependencias y rupturas entre los conceptos.

La unidad de base de estas dependencias y rupturas entre los conceptos va a ser el **esquema**, organización invariante de la conducta para una clase de situaciones. Es el esquema el que organiza y da sentido a las acciones, situaciones y representaciones simbólicas que las acompañan. Los esquemas en general son unidades estructurales y funcionales a la vez, organizaciones del producto de la actividad cognitiva e instrumentos de asimilación. El reconocimiento de invariantes va a ser la clave para la generalización de un esquema.

El principio básico sobre el que va a apoyarse el resto es que, *"es a través de las situaciones y problemas a resolver como un concepto adquiere sentido para el niño"* (Chamorro, 1997). Distinguiendose así entre las situaciones en las que el individuo dispone de medios para su tratamiento y aquellas que le obligan a la reflexión y búsqueda que pueden conducirle o no al éxito. El concepto de esquema, pertinente en ambos casos, no funciona de igual forma, dando lugar para el primer tipo de situaciones a conductas automatizadas organizadas en un esquema único, en tanto que para las segundas aparecen distintos esquemas compatibles que se combinan y acomodan, produciendo descubrimientos.

La teoría de los Campos Conceptuales va a precisar la funcionalidad de los esquemas para el proceso de transformación de conocimientos a través de las situaciones centrada sobre los conceptos. Puede así comprenderse la transformación de las situaciones y la de los conocimientos en relación con los conceptos y a la inversa. (Vernaud, 1991). Las competencias matemáticas van a estar sustentadas por esquemas, en los que habrá que buscar los conocimientos en actos del estudiante, que son los elementos cognitivos que permiten que la acción del estudiante sea operatoria y eficaz. Los esquemas tienen el mismo carácter lógico que los algoritmos, y son eficaces o no de acuerdo a la situación. Los esquemas están sustentados sobre una conceptuali8zación implícita.

*"Buena parte del aprendizaje escolar que debería **ser conceptual** no sobrepasa, en el caso de muchos estudiantes, el **aprendizaje representacional**. Aprende definiciones de conceptos, pero no adquieren su significado, se posee las etiquetas de los conceptos, no sus significados"* (Novak, 1998).

El significado de los conceptos aumenta a medida que las etiquetas conceptuales se asocian entre sí para formar proposiciones. Se adquieren nuevos conceptos por desarrollar, formación conceptual o por asimilación conceptual, en la que se adquiere el significado de las nuevas etiquetas conceptuales cuando se unen proposiciones que contienen conceptos ya conocidos.

La utilidad de la noción de campos conceptual procede del hecho que :

"permite estudiar de una manera más integrada el desarrollo simultáneo y coordinado de los diferentes conceptos necesarios para la comprensión de un conjunto organizado de clases de problemas, de procedimiento que permite tratarlos. Las jerarquías que estos estudios ponen en evidencia no forman un orden total, sino parcial, contrariamente al modelo de la teoría de los estadios. La noción de campo conceptual rehabilita los contenidos de conocimiento, minimizados demasiado a menudo o borrado por la apropiación estructuralista" (Vergnaud, 1991).

Como una forma de centrar este trabajo veremos el concepto matemático de los sistemas de ecuaciones lineales (y por ende, incluye todas las situaciones problemáticas que se reduzcan a resolver dichos sistemas).

3. Sistemas de ecuaciones lineales

En el centro del álgebra lineal y en gran parte de las matemática aplicadas, se halla el problema de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. ¿Qué son las ecuaciones lineales? Un ejemplo sencillo de una ecuación lineal es $ax + by = c$ donde **x** e **y** son variables reales y **a, b** y **c** son constantes nulas reales. Si **a** y **b** lo son entonces la gráfica de esta ecuación es una línea recta en el plano; ésta es una razón por la cual la ecuación recibe el nombre de lineal. La ecuación anterior recibe el nombre de **ecuación lineal con dos incógnitas** x e y.

Los problemas que se estudian son los lineales, entendiendo por aquellos en los que al duplicar, triplicar, etc., la causa, ocurre que se duplica, triplica, etc., el efecto; también se requiere que, al sumar las causas, se suman los efectos.

Así, por ejemplo, si las causas vienen representadas por **x** e **y**, que denotan dos números cualquiera, y el efecto es $\alpha = 3x - 2y$, este á depende linealmente de los **x** e y.

Los problemas directos son aquellos en los que los datos conducen directamente sin rodeos, a los resultados. Si lo que se conocen son los resultados y se buscan los datos que se necesitarían para obtener dichos resultados, se está considerando un problema inverso (o recíproco). Los sistemas de ecuaciones lineales tienen esta condición de problema inverso, en ellos hay que hallar los datos (por ejemplo **x** e y) que, en un problema de tipo lineal, conducirían a unos resultados que nos son conocidos (por ejemplo α y ß). Así, en el sistema de ecuaciones lineales $3x - 2y = \alpha$ y $4x + 5y = \beta$ hay que encontrar los valores **x** e **y** (que son las incógnitas) que conducen a los resultados. α y ß que son dados.

Consideremos el sistema de **m** ecuaciones lineales y **n** incógnitas

$$\begin{array}{c}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m
\end{array}$$

Cuando por lo menos uno de $b_1, \ldots, b_m$ es no nulo el sistema de ecuaciones se llama **no homogéneo** . Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ el sistema se llama **homogéneo**.

a) Una n-upla ($k_1, k_2, \ldots, k_n$) de números, es solución del sistema, si satisface a cada una de las ecuaciones, es decir, si al sustituir los valores en cada una de las variables y al operar obtenemos la constante.

b) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen la(s) misma(s) solución(es).

3.1. Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de **m** ecuaciones lineales y **n** incógnitas. Se clasifican en **Consistente** (tienen solución) e **inconsistente** (no tienen solución).

Los **Sistemas Consistentes** se subdividen en :

a) Aquellos que tienen **solución única**, ésto se da cuando los sistemas de ecuaciones están

formado por un número de ecuaciones independientes, igual al de incógnitas ($m = n$).

b) Aquellos que tienen **infinitas soluciones**, estos se obtienen cuando al ir eliminando las ecuaciones que dependen de las otras, obtenemos un sistema de ecuaciones equivalentes formado por un número de ecuaciones independientes menor al de incógnitas ($m < n$).

Para obtener dichas soluciones, se dejan fijas $n - m$ variables, con lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones en el que su número de incógnitas es igual al de ecuaciones, como en el caso anterior. El conjunto de soluciones es una variedad lineal (que tiene infinitos elementos).

Los sistemas inconsistentes son aquellos que se obtienen cuando al reducir el sistema, quedan dentro de las ecuaciones lineales resultantes, ecuaciones impropias, (aquellas que tienen todos sus coeficientes nulos, pero el término libre (constante) es distinto de cero) y por lo tanto, no existe solución alguna que lo satisfaga.

Veremos a continuación métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.2. Método de eliminación de Gauss

El método más simple y más útil que debe enseñarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el **método de eliminación de Gauss** o **eliminación Gaussiana**. La eliminación es el **algoritmo** que se usa constantemente para resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales.

Veamos un ejemplo de éste método, el cual se puede extender con facilidad a mayor número de ecuaciones e incógnitas.

Sea

1) $2x + y + z = 1 \qquad 4x + y = -2$ y

$-2x + 2y + z = 7$

El método comienza sustrayendo múltiplos de la primera ecuación de las restantes, con el fin de eliminar x de las dos últimas ecuaciones. Para lo cual se requiere:

I) Sustraer de la segunda ecuación, la primera multiplicada por 2;

II) Sustraer de la tercera ecuación, la primera multiplicada por -1.

El resultado da un sistema equivalente de ecuaciones.

2) $2x + y + z = 1, \qquad y - 2z = -4,\ 3y + 2z = 8$

El coeficiente 2, que multiplica la primera incógnita x en la primera ecuación, se conoce como el pivote en este primer paso de eliminación.

En el segundo paso no se considera la primera ecuación. Las otras dos ecuaciones solo involucran las dos incógnitas **y, z,** y se puede aplicar el mismo procedimiento de eliminación. En este paso el pivote será -1 y se sustraerá un múltiplo de esta segunda ecuación del resto de las ecuaciones (en este caso sólo resta una) para eliminar y sumar la segunda ecuación multiplicada por 3 a la tercera o, en otras palabras,

III) Sustraer de la tercera ecuación la segunda multiplicada por -3.

Ahora está completo el proceso de eliminación, al menos en la dirección **hacia delante**, y nos queda el sistema equivalente simplificado.

3) $2x + y + z = 1 \quad y - 2z = -4 \quad -4z = -4$

Existe un orden evidente para resolver este sistema. La última ecuación del sistema 3) da $z = 1$; sustituyendo en la segunda ecuación hallamos $y = -2$; entonces sustituyendo los dos valores encontrados anteriormente en la primera ecuación da $x = 1$. Este proceso tan simple descrito anteriormente se denomina **sustitución regresiva**.

El algoritmo de la eliminación Gaussiana es engañosamente simple, pero hay aspectos más profundos que la simple mecánica de la eliminación como son la interpretación de la eliminación con factorización de la matriz de los coeficientes. Introduciendo la notación matricial para el sistema de ecuaciones simultáneas, es como AX = B donde: **A.** la matriz de los coeficientes, **X.** la matriz de las variables y **B.** la matriz de las constantes.En el sistema 1) desarrollado anteriormente,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

"Entonces la eliminación consistirá en factorizar A como un producto, LU, de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U". (Strang, 1988).

Lo interesante es ver como la noción de "Campo Conceptual como un espacio de problemas o situaciones problemas, cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos en estrecha conexión" como lo visualizó Vergnaud, esto se cumple a cabalidad.

3.3 El método gráfico de resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Este método es aplicable a sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, y su fundamento esta en que una ecuación lineal con dos incógnitas de la forma ax + by = c , con a, b, c reales, les corresponde gráficamente una recta y la cuál queda determinada en forma única por dos puntos. Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas es graficar cada una de las ecuaciones que lo forman y determinar, en el plano, las coordenadas del punto de intersección de las rectas representadas por las ecuaciones. Por lo tanto un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tendrá o no solución según la posición relativa de dos rectas con el plano cartesiano:

Sistema Compatible : a) Las rectas se cortan en un solo punto (solución única)

b) Las rectas se superponen o coinciden (infinitas soluciones)

Sistema incompatible: Rectas paralelas (no existe solución)

En general esta solución no es exacta ya que depende de la precisión con que se dibuja el gráfico y del grado de exactitud con que se pueden leer las coordenadas del punto de intersección.

La extensión a sistemas de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas se obtiene del hecho que una ecuación lineal con tres incógnitas ax + by + cz = d con a, b, c y d reales representa un plano en el espacio tridimensional. Además del hecho geométrico que la intersección de dos planos es una línea recta. Luego un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas tendrá solución o no tendrá según la posición relativa de tres planos en el espacio.

Como se puede apreciar el paso de un sistema de dos ecuaciones a uno de tres ecuaciones con tres incógnitas marca un grado de dificultad mayor para su representación gráfica. Pero para sistemas de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas es imposible usar tal método. El espacio de cuatro dimensiones no es representable gráficamente.

Un hecho destacable de este método en su génesis es la relación de las ecuaciones lineales con la gráfica de una recta y el uso de escala de medida para representar puntos, lo cual conectas situaciones cuyo tratamiento implica conceptos en estrecha conexión.

3.4. Método de sustitución

En sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas este método consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, con el objeto de llegar a una ecuación lineal con una incógnita que nos entregará el valor de, la otra incógnita. La generalización a un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas esta dado en forma natural despejando una variable de una de las tres ecuaciones y sustituyendo dicho valor en cada una de las restantes ecuaciones con lo cual se obtiene un sistema reducido de dos ecuaciones y dos incógnitas, al que se le vuelve a aplicar el método de sustitución visto anteriormente. (De las Heras, Fuenzalida y otros, 1993).

3.5. Método de igualación

En un sistema de dos ecuaciones, y dos incógnitas, este método consiste en despejar la misma incógnita en función de la otra, en cada una de las ecuaciones, para posteriormente **igualar** las expresiones resultantes, con el objeto de determinar el valor de una de las incógnitas y por lo tanto la solución del sistema. (De las Heras, Fuenzalida y otros, 1993).

4.- Análisis didáctico de los sistemas de ecuaciones lineales

El análisis didáctico se hará a partir de los Campos Conceptuales, para ello veamos la tripleta que aparece en la definición de Concepto de Vergnaud en los métodos antes señalados.

Las **situaciones problemáticas de donde surgen los sistemas de ecuaciones lineales son los del proble-**

ma recíproco de la dependencia lineal, es decir, para aquellas situaciones en que se conocen los resultados (las constantes), pero se ignoran los datos (las variables).

El método de eliminación de Gauss es un algoritmo y, por lo tanto, encontramos una organización invariante de la conducta. Es decir un **esquema** para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Esta organización la encontramos cuando el método recomienda la elección de un **pivote** y comienza sustrayendo múltiplos de la primera ecuación a las restantes, con el objeto de eliminar la primera variable del resto de las ecuaciones . Posteriormente se vuelve a utilizar el mismo esquema para las ecuaciones que están bajo de la primera, obteniéndose un sistema equivalente. Este proceso (esquema) se repite hasta que se obtiene un sistema equivalente simplificado (forma triangular).

En este caso la última ecuación es una ecuación lineal de una variable en cuya resolución encontramos un nuevo esquema. Ahora esta solución desencadena un proceso de sustitución regresiva, que en cada caso va obteniendo una ecuación lineal de una variable. Las competencias matemáticas, que permiten a los alumnos resolver eficientemente, los sistemas de ecuaciones lineales por el método descrito anteriormente están sustentadas por los esquemas organizadores de la conducta en la elección de un pivote y las ejecuciones correctas de las operaciones descritas, para lo cual se tendrá que tener una atenta concentración, en la ejecución correcta de los esquemas. Además ver con claridad los invariantes dentro de los esquemas, en nuestro caso la elección del pivote para ir eliminando una variable. Proceso que se mantiene y se repite hasta la obtención del sistema de la forma triangular. Este invariante permite generalizar dicho método con facilidad.

El método de reducción de Gauss o reducción Gaussiana es un **esquema estándar y automatizado** que descansa en último término en la resolución de una ecuación lineal con una incógnita, que se va aplicando reiterativamente en la sustitución regresiva. El Campo Conceptual de origen es el de las estructuras multiplicativas, que comprende a todas aquellas situaciones en las que se tratan una o más multiplicaciones o divisiones y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten las situaciones de combinación lineal y función lineal.

Sin embargo también el campo conceptual de las estructuras aditivas está presente en el algoritmo gaussiano.

El método de Gauss se puede generalizar sin mayores dificultades, debido a que está sustentado en un proceso invariante que es el de eliminar una variable en la primera columna de la segunda ecuación, con la participación de multiplicaciones convenientes para escalares en la primera ecuación, lo mismo con la tercera, etc,.... hasta obtener un sistema triangular equivalente al sistema original. El proceso de sustitución regresiva también es una forma automatizada de ir obteniendo el valor exacto de cada variable y por ende la solución del sistema.

Este método es el que mejor se adapta en forma natural a la generalización con el esquema triangular de eliminación ya que posee un orden exacto de eliminación y una sustitución regresiva secuenciada. Por ello es el más recomendable a tratar con los alumnos.

Además posee filiaciones naturales con otros conceptos como son el de matriz (triangular inferior) dentro de la estructura de anillos de las matrices. Es así que el estudio de la matriz ampliada del sistema, es decir, la matriz del sistema a la cual se le agrega la columna de las constantes del sistema de ecuaciones lineales, nos proporciona información, sobre la función lineal asociada a dicha matriz (en bases fijas). Pudiendo tener datos sobre eventuales bases del núcleo de dicha función lineal. Esta nos permite analizar y clasificar la variedad de situaciones en que se encuentra el concepto tratado.

En el caso del **método gráfico de resolución de** un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas, el esquema lo encontramos en la construcción de la gráfica de cada una de las ecuaciones, eligiendo para cada una dos pares ordenados de números distintos que satisfagan a cada ecuación .

Ahora bien, esta elección está sustentada por el hecho geométrico que por dos puntos distintos pasa una única recta. La representación de cada una de las ecuaciones en un mismo sistema coordenado, nos entregará la solución única del sistema en el punto de intersección de las dos rectas, o infinitas soluciones del sistema en el caso que las rectas sean coincidentes (ecuaciones dependientes), o bien ninguna solución del sistema en el caso que las rectas sean paralelas (sin puntos comunes).

Un invariante en el método gráfico lo encontramos en la elección de la pareja de pares ordenados de números, que satisfagan la ecuación. Esto se hace tomando un número conveniente, como valor de una de las incógnitas por ejemplo **x** y obteniendo el valor correspondiente para la otra incógnita **y**. Una vez encontrados esta pareja se representan en el plano cartesiano y se unen los puntos representados, por una regla, esto nos da la gráfica de la recta que pasa por los puntos elegidos.

Los otros métodos señalados anteriormente, método gráfico y método de sustitución adolecen de limitaciones.

El método gráfico, por ejemplo, tiene la limitación de la imposibilidad de extenderlo a casos más generales como es m = n = 4 o más, ya que con sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas se torna complicado graficar este resultado. La gran ventaja se obtiene en el caso de dos ecuaciones de dos incógnitas donde podemos con facilidad conectar al alumno con un panorama más amplio de conceptos (gráfica de una función, escalas y medidas) que permiten visualizar el concepto de solución de un sistema a través de una gráfica simultánea de ecuaciones. Este recurso didáctico permite buenos resultados, además permite describir con precisión la variedad de conductas, procedimientos y razonamientos de los alumnos.

En la resolución de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas por el método de sustitución encontramos un **esquema**, en el despeje de una de las incógnitas en una de las ecuaciones en función de la otra incógnita. Este esquema le cuesta a muchos estudiantes por la presencia de teoremas en acto errado del alumno y debe ser efectuado con soltura y precisión. El esquema continúa una vez que se tiene la incógnita elegida despejada. Se procede a su sustitución en la otra ecuación, todo lo cual nos conduce a otro esquema que es la resolución de una ecuación lineal con una incógnita, que da el valor de numérico de una de las incógnitas. Este valor se sustituye en la variable despejada y se obtiene la solución del sistema.

Un invariante en este método lo encontramos en la elección y posterior despeje de una de las incógnitas en función de la otra.

El método de sustitución tiene la desventaja de ser de trámite engorroso cuando el sistema a tratar tiene un alto número de incógnitas y ecuaciones.

Una ventaja a señalar es la que permite el trabajo de despeje de incógnitas en término de otras y su posterior sustitución en una ecuación. El trabajo de este invariante, le proporciona herramientas útiles al estudiante en el desenvolvimiento del quehacer matemático futuro con conceptos diferentes.

El método de igualación, según la teoría de Vergnaud está sostenido por la organización invariante de la conducta que resuelve las situaciones de expresar un término (incógnita) en función de otro término (incógnita). Este esquema es la base fundamental de muchas técnicas empleadas en matemática, pero en este método, por sobre todo, funciona el **conocimiento en acto** más primogénio en matemática como es la noción de **igualdad**, que permite literalmente pegar expresiones, logrando con ello trasladar la situación inicial a un esquema conocido, como es, el de resolver una ecuación lineal con una incógnita. La solución obtenida nos conduce a la solución del sistema inicial, mediante una sustitución en una de las expresiones despejadas.

En los invariantes operatorios de este método, como son los procesos que permiten despejar y posteriormente igualar expresiones, se encuentra la clave que lleva a extender este método a sistemas con mayor número de ecuaciones y mayor número de incógnitas.

Como aplicación de la teoría de Vergnaud a los fenómenos didácticos, cabe destacar que en las situaciones iniciales de su aprendizaje es importante trabajar los sistemas de ecuaciones que están formados por un número de **ecuaciones independientes** igual al de incógnitas. Esta condición inicial conduce a la solución única del sistema.

La resolución de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas es recomendable introducirla mediante el método gráfico en su etapa inicial, es decir, en estudiantes del 2° año de Educación Media (15 a 16 años) como la búsqueda de las coordenadas del punto de intersección de las rectas que representan a las respectivas ecuaciones. De preferencia en sistemas que tengan soluciones constituidas por números enteros. En el caso de que las ecuaciones sean **dependientes** (una ecuación es combinación lineal de la otra), esto se representará geométricamente por rectas coincidentes, y por lo tanto, el sistema tendrá infinitas soluciones. Los sistemas incompatibles, (sin soluciones) se visualizan eficazmente con éste método por las rectas paralelas.

Las limitaciones de este método (caso en que la solución no esté constituida por números enteros) nos pone en la situación de resolver el sistema de ecuaciones empleando los métodos ya mencionados. Sin embargo, en el caso que este sistema de ecuaciones esté formado por un número de ecuaciones independientes igual al número de incógnita y este aumente, tiene supremacía en eficiencia, eficacia y efectividad el método de Gauss, como es el caso de la enseñanza en cursos superiores.

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen no solamente un tema de gran interés en la enseñanza del álgebra en la Educación Media, sino también es una de las cuestiones que proporciona mayor rendimiento formativo y práctico en la matemática del ciclo medio.

La importancia excepcional de las ecuaciones lineales reside precisamente en la posibilidad de conectar o ligar la realidad con la matemática, mediante representaciones de situaciones - problemas que el alumno resuelve generalmente por su propio esfuerzo estableciéndose un proceso de devolución interesante. Posibilidades de aplicación de procedimientos heurísticos y aplicación a las más variadas situaciones concretas, constituyen los elementos básicos de su importancia didáctica. "*Es necesario que estas características sean tenidas en cuenta por el profesor, quien debe enfrentar los retos en la negociación acertada de los significados. El aprendizaje es una actividad que no se puede compartir, pues es principalmente responsabilidad del que aprende, el profesor es el responsable de buscar la mejor negociación posible de significados y un clima emocional que favorezca el aprendizaje significativo. El profesor debe asimismo aceptar su papel en la negociación de significados y en la creación de un clima emocional propicio que la fomente*". (Novak, 1998).

El desarrollo histórico de las formas linguísticas y simbológicas que permiten expresar un sistema de ecuaciones lineales tales como la expresión general.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ x_i = b_j, j = 1,2,\ldots, m.$$

o bien la forma matricial AX = B

donde

A = (a_{ij}) es la matriz del sistema, X = (x_i) es la matriz de las incógnitas y

B = (b_j) es la matriz de las constantes

Denotan una manifiesta evolución y precisión de los conceptos involucrados que permiten conectarlo con redes conceptuales diferentes, todo lo cual va enriqueciendo la clase de situaciones y problemas iniciales, lo que permite ser de gran ayuda en la solución de problemas más complejos, transformándose la representación simbólica en un medio decisivo en la conceptualización.

El Álgebra lineal, proporciona poderosos métodos que permiten automatizar los procedimientos, a través de los cuales se logra obtener las soluciones de sistema de ecuaciones lineales. Estos sistemas tienen una especial importancia, puesto que en una gran variedad de situaciones provenientes de las ciencias de la naturaleza (física, química, biología, etc.) o de las ciencias humanas como la psicología, sociología, economía etc.,), surgen abundantes situaciones que se modelan a través de sistemas de ecuaciones lineales, que constan de gran cantidad de ecuaciones y gran cantidad de incógnitas y la solución de dichos sistemas es la expresión cuantitativa de dicha situación.

4.1. De la cantidad de operaciones que la eliminación de Gauss requiere

La pregunta práctica, de hecho financiera que se puede plantear es ¿Cuántas operaciones aritméticas separadas requiere la eliminación gaussiana para un sistema no homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas? Si n es grande dichos cálculos los pueden hacer los ordenadores. Dado que se conocen todos los pasos, se puede predecir el número de operaciones que se realizarían. Si consideramos solamente las operaciones de la izquierda del sistema, estas operaciones son de dos clases. Una es una división por el pivote con el objeto de encontrar qué múltiplo (por ejemplo l) de la ecuación correspondiente al pivote será sustituida de una ecuación debajo de ella. A continuación, cuando realizamos esta sustracción de una ecuación de otra, encontramos cada vez una combinación de multiplicación - sustracción; los términos de la ecuación que corresponden al pivote se multiplican por l y entonces se sustraen de la ecuación debajo de ella.

Supongamos que se llama a cada división y cada multiplicación – sustracción, una sola operación. Al principio, cuando la primera ecuación tiene longitud n, lleva n operaciones por cada cero que logremos en la primera columna : una para encontrar el múltiplo l , y las otras para encontrar las nuevas entradas a lo largo de la fila. Hay n-1 filas bajo la primera, de manera que el primer paso de la eliminación necesita n (n-1) = n^2 – n operaciones. Las etapas posteriores son mas rápidas, porque las ecuaciones se vuelven progresivamente más cortas. Sólo, se necesitan k^2 – k operaciones para desalojar la columna debajo del pivote, empleando el mismo razonamiento aplicado en la primera etapa, cuando k era igual a n. En conjunto, el número total de operaciones aritméticas en los lados izquierdos de las ecuaciones:

$$P = (1^2 + \ldots + n^2) - (1 + \ldots + n) = n(n+1)(2n+1) - n\tfrac{1}{3}(n+1) = \tfrac{1}{3}(n^3 - n).$$

S i n es suficientemente grande, una buena estimación del número de operaciones es $P \sim n^3$.

La sustitución regresiva es mucho mas rápida. La última incógnita se encuentra con una operación (una división por el último pivote), la penúltima requiere dos, y así sucesivamente. La sustitución regresiva requiere un total de operaciones

$Q = 1 + 2 + \ldots + n = \ n(n+1) \ \ n^2$. (Strang, 1998)

Dada la importancia que los sistemas de ecuaciones lineales tienen, es necesario plantearse algunas conjeturas sobre su enseñanza.

1.- La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales no contempla la totalidad de las conexiones de los conceptos que las sustentan.

2.- La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en el ciclo medio contempla distintos métodos de resolución que no son los más adecuados para una generalización.

3.- En el ciclo medio de enseñanza por lo general se omite el método de eliminación de Gauss.

4.- El método de eliminación es el más apto para la generalización.

5.- El método de eliminación Gauss es el más económico en tiempo.

6.- El método de eliminación de Gauss permite una conexión natural con otras redes conceptuales.

BIBLIOGRAFIA

Ausebal, D.,, Novak, J., Hanesian, H.Psicología Educativa. Editorial Trillas. México, p. 87-88. 1976.

Chamorro, C. Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental. Tesis Doctoral Departamento de didáctica, Organización Escolar y Didácticas especiales. Facultad de Educación. U.N.E.D. Madrid, p. 38-40, 1997.

Chamorro, C. II Campo Conceptúale delle grandezze spaziali. La matemática e la sua didacttica N°.2 p. 175, 1999.

De las Heras, R.,Fuenzalida, G. y otros, Álgebra y Geometría. I año Educación Media, Santillana. Santiago, p. 62-63, 1993.

Johsua, S., Duppin, J.J.Introduction a la didactique des sciences et des Mathematiques. Presses Universitaires de France. Paris. 1993.

Novak, J. Conocimiento y Aprendizaje. Alianza Editorial, S.A. Madrid, p. 60. 1998.Strang, G.Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Editorial Addison-Wesley. México, p. 2 – 5. 1988.

Vergnaud, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des Mathematiques, Vol. 10, 2/3. , Grenoble La Pensée Sauvage. p. 135–169, 1991.

Vergnaud, G. Quelques orientations théoriques y Méthodolo- quiques des recherches francaises en didactique des Mathematiques", en recherches en didactique des Mathematiques. Grenoble, La Pensée Sauvage. 1981