

UNA PROPUESTA PARA DIRIGIR LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA EN LOS PROGRAMAS CHILENOS Y LA IDEA DE LA EXIGENCIA

William Campillay Ll.

Resumen

Este artículo se basa en dos situaciones fundamentales para el desarrollo y el mejoramiento de la calidad de la educación, la primera es la experiencia vivida en Francia, pasantía financiada por el gobierno chileno para estudiantes de pedagogía en matemática y la segunda es la conmemoración de los 90 años de la publicación del libro titulado "El problema nacional", escrito por Darío Salas, el cual formó y forma parte esencial para el desarrollo de la educación chilena.

Palabras claves: Demostración en matemática, Enseñanza de la matemática, Didáctica, la exigencia.

Abstract

This article is based on two fundamental situations for the development and the improvement of the quality of the education, the first one is the experience lived in France, internship financed by the Chilean government for students of pedagogy in mathematics and the second one is the commemoration of 90 years of the publication of the qualified book "The national problem", written by Darío Salas, he(it) which formed and forms a part essentially, for the development of the Chilean education.

Key words: Demonstration in mathematics, Education of the mathematics, Didactics, the exigency

Introducción

El lunes 29 de enero de 2007, el diario La Tercera publicaba en la sección de educación pública: "Veinticuatro alumnos de último año de Pedagogía en Matemática de la Universidad de La Serena, U. Católica de Valparaíso y UMCE, viajarán durante un semestre a Francia como parte de un nuevo programa piloto que impulsa el ministerio de educación para el perfeccionamiento docente. Los estudiantes partirán la tercera semana de febrero para tomar un curso de didácticas en matemática en el Instituto de Formación de Maestros de Toulouse. Las becas implicarán una inversión de 155 millones de pesos por parte del

MINEDUC". Es así como comienza esta primera iniciativa, caracterizada como programa piloto. No podría iniciar este artículo de otra forma más que como un cuento, o como cuando se narra un hecho soñado, "Il etait un fois..." Érase un vez... un grupo de jóvenes con un sueño común, terminar una carrera profesional, en un mismo país, de distintas ciudades, cada una con su atractivo especial, este país llamado Chile, donde su historia, en relación a su desarrollo social y económico, lleva presentes entretenidas aventuras que se construyen con esfuerzo y perseverancia, este año 2007, un grupo de 24 chilenos, parte rumbo a Francia para complementar su formación docente...

Las principales actividades realizadas en la hermosa ciudad de Toulouse se basaron principalmente en la Teoría Antropológica de lo didáctico, creada por Yves Chevallard y la Teoría de Situaciones didácticas, formulada por Guy Brosseau. A esto se le agrega el fuerte trabajo geométrico y las visitas a los Liceos de la ciudad para observar el trabajo docente. Es importante mencionar la experiencia cultural, destacando los lugares visitados (Toulouse-Carcassonne-Albi-Rocamadour-Lourdes-Auch-Pic du Midi-París) por su contenido histórico. Una vez de regreso, la sensación producida fue especial, la cultura francesa observada y a la vez vivida permite valorar mucho más el país donde nacimos, los proyectos y las ideas deben ir decantando paulatinamente y el aporte será entregado de una manera humilde y paciente debido a que sin duda la experiencia en la realidad educativa chilena es fundamental. Ha sido un privilegio conocer el viejo continente, que por tanto tiempo ha influenciado a nuestras generaciones, pero es hora de crear, de asimilar lo aprendido y de hacerlo nuestro, es por eso que escribo este artículo a modo de propuesta para motivar la reflexión y convencernos de lo que realmente es importante para la Educación Matemática Chilena.

"Aportes" para la educación matemática chilena

Cuando inicié mi exposición, actividad que finalizaba la pasantía, no podría haber sido de otra forma, que presentar la frase con la cual René Descartes comenzaba

su libro "El discurso del método": "Le bons sens est la chose du monde la mieux partegée", la razón es la cosa del mundo mejor repartida. Con esta idea que rondaba en mi subconsciente trabajé junto con mis compañeros de grupo el tema de la construcción de regla y compás, semejanza de figuras planas y por último la demostración que a continuación se presenta, el núcleo del trabajo realizado.

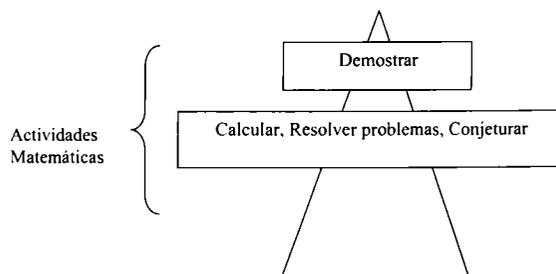
Para comenzar se planteó la siguiente interrogante: ¿Cuál es el estatus de la demostración en la educación chilena? "No se debe olvidar que lo que constituye una demostración varía de una cultura a otra, así como de una época a otra" (Wilder, 1981). Es por eso que como sociedad se debe llegar a un acuerdo general en relación a qué objetivos se buscan con la intención de la realizar la actividad matemática de demostrar.

Cuando se habla del estatus se refiere a la posición que se le asigna a esta actividad matemática en los programas nacionales. Para comenzar este análisis se debe considerar el camino seguido durante la formación del estudiante, y cómo progresivamente se pretende que se aventure en la exploración del género de tarea de demostración; para esto, inicialmente se realiza una revisión exhaustiva de los programas de estudio de quinto básico a cuarto medio, pues es necesario considerar esta etapa, ya que en ella se construye, a nuestro juicio, la intencionalidad matemática referida a desarrollar algunos elementos y habilidades matemáticas que permitan el estudio de esta disciplina, comprendiendo la importancia de la matemática como una actividad cultural importante.

En relación a las orientaciones didácticas presentadas en los programas, el énfasis primordial se le otorga a la resolución de problemas, esto es fundamental dentro de la actividad matemática, pues los avances matemáticos importantes se han realizado gracias al esfuerzo de resolver problemas específicos, pero se debe considerar y elevar el estatus de la demostración en los programas y en la actividad práctica en el aula, ya que si no se considera como parte importante es como si se eliminaran los últimos pasos del método científico. Es coherente resaltar esta posición pues está de acuerdo con los Objetivos Fundamentales Transversales, siendo un motivo más para considerar la actividad de demostrar como necesaria para la formación del ciudadano, ya que se persigue con esto que el estudiante desarrolle sus habilidades de pensamiento,

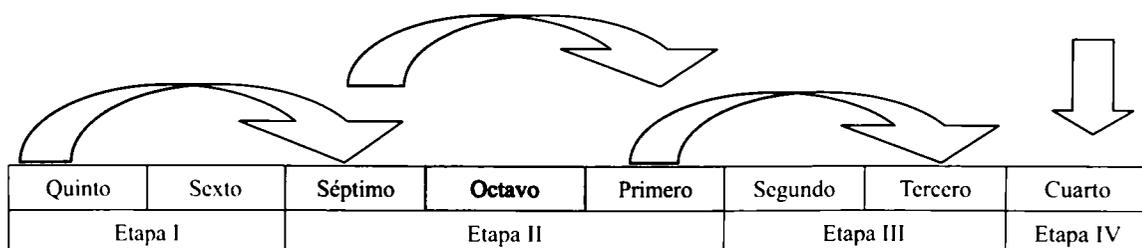
tales como son la exploración de estrategias cognitivas en la resolución de problemas, la anticipación de resultados y la utilización de los sistemas y el instrumental de las matemáticas en la interpretación del mundo circundante (muy importante), la recopilación, sistematización, interpretación, evaluación y comunicación de información y en la apropiación significativa de la realidad. La intencionalidad de la demostración también se refiere a los OFT en el ámbito Crecimiento y Autoafirmación Personal, los cuales corresponden al interés en conocer la realidad, y habilidades de selección de información, uso del conocimiento, razonamiento metódico y reflexivo, y resolución de problemas. El programa plantea objetivos, contenidos y actividades que buscan desarrollar en alumnas y alumnos las capacidades de explorar diferentes estrategias para resolver problemas, sistematizar procedimientos, descubrir regularidades y patrones, organizar y analizar información cuantitativa, y justificar y comunicar eficazmente procedimientos y resultados, detectar y corregir errores, dando énfasis al trabajo metódico.

Este esquema representa que la actividad de demostrar es una actividad específica y taxativamente, es la más fina y específica, pero esto no le quita el carácter de fundamental en la enseñanza de la matemática.



No existe una concepción inmutable y única de la demostración; en relación a esto, no se podría tener una sola concepción de la demostración y menos caer en un rigor exagerado, lo cual desvirtuaría el sentido y funcionalidad de la demostración.

El cuadro siguiente presenta un esquema basado en los contenidos de los programas, se presenta la demostración como un proceso continuo acompañando a las otras actividades matemáticas. Dividiendo este proceso en cuatro etapas, siendo las dos primeras análogas a los dos últimos estadio cognitivos propuestos por Piaget.



Etapa I: Se encuentran los estudiantes que cursan quinto y sexto básico, en general tienen desde 10 a 12 años, es en este periodo, donde los estudiantes deben observar construcciones geométricas para establecer algunas conjeturas, argumentar acerca de figuras, es en esta etapa donde deben poner énfasis en la geometría observativa. Esta división del programa es coherente con los estadios cognitivos propuestos por Piaget, que corresponde al de operaciones concretas (7-11 años). El sujeto educativo en esta fase no sólo usa el símbolo, sino es capaz de usarlo de una manera lógica y a través de la capacidad de conservar y llegar a generalizaciones. Es importante considerar que el niño ha adquirido la noción de conservación de superficies. Por ejemplo, puesto frente a cuadrados de papel se puede dar cuenta que reúnen la misma superficie aunque estos cuadrados se encuentren amontonados o dispersos.

En esta etapa es fundamental aclarar la idea de una proposición matemática, la cual corresponde a una "afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos, es decir, que tienen uno de los dos valores posibles V (verdadero) o F (falso)" (Guzmán, 2003).

Etapa II: Esta segunda etapa que hemos considerado como fundamental para motivar la actividad matemática de demostrar, los estudiantes tienen desde 12 a 15 años y es la etapa donde se le debe presentar la necesidad de demostrar con situaciones interesantes que permitan motivar e insertar al estudiante en la investigación para que conjeture y pueda aventurarse a demostrar. Se diferencia de la etapa anterior, en que el sujeto presentaba dificultades al aplicar sus capacidades a situaciones abstractas. Por ejemplo, si un adulto le dice "no te burles de Juanito porque es gordo... ¿qué dirías si te sucediera a ti?", la respuesta del sujeto en el estadio de sólo operaciones concretas sería: "Yo no soy gordo".

Es recién desde los 12 años en adelante, según Piaget, que el cerebro humano está potencialmente capacitado (desde la expresión de los genes), para formular pensamientos realmente abstractos, es aquí el momento para comenzar con el razonamiento hipotético deductivo.

Es aquí que se deben presentar actividades, a los estudiantes, para que comprendan la utilidad del razonamiento deductivo, y los principales objetivos a alcanzar serán:

- Conocer un contraejemplo suficiente para invalidar un enunciado.
- Comprender que unos ejemplos no son suficientes para comprobar la veracidad de una proposición.
- Una constatación de medidas sobre un dibujo

no es suficiente para probar que un enunciado de geometría es verdadero.

- Saber enunciar el recíproco de una propiedad de la forma "Si... entonces...".
- Saber buscar y redactar encadenamientos deductivos.
- Saber expresar demostraciones simples utilizando lenguaje matemático.

Etapa III: Los estudiantes tienen entre 15 y 17 años, es en este período que se puede presentar a los estudiantes el género de tarea como necesario e importante dentro de las actividades matemáticas, para convencerse de las técnicas utilizadas en matemáticas que ha ocupado durante su proceso de formación; esto va acompañado con las unidades que facilitan este proceso, principalmente como "Lenguaje Algebraico", "Transformaciones Isométricas", "Congruencia de Figuras Planas", "Semejanza de figuras Planas", "La circunferencia y sus ángulos", "Más sobre triángulos rectángulos".

En esta etapa, es importante considerar y organizar una praxeología matemática u organización matemática, contextualizada en la Teoría antropológica de lo didáctico, que permita al alumno elaborar técnicas de razonamientos, para desarrollar los tipos de tareas relacionados con la actividad de demostrar.

Etapa IV: En esta etapa los estudiantes tienen entre 17 y 18 años y corresponde a una etapa de reflexión, más bien evaluativa, la cual corresponde al último año de formación del ciudadano en su etapa escolar, es por eso que en esta fase se debe motivar y presentar demostraciones que sean útiles y que complementen su formación. Es importante destacar la utilidad de esta actividad matemática debido a que uno de los ejes centrales para la formación del estudiante son los objetivos fundamentales transversales, y en ellos se hace explícita la necesidad de formar seres que reflexionen razonadamente, que sean críticos y puedan contribuir al desarrollo social.

Y para finalizar existe la idea de la dualidad del profesor chileno para abordar contenidos de una manera interesante, ya sea utilizando ordenadores o materiales concretos en el aula, situación que es bastante esperable debido a que los materiales computacionales no siempre se encuentran a disposición (que no se piense que es una problemática exclusivamente chilena), es por eso que las actividades deben ir acompañadas de una versatilidad de aplicaciones, y que podamos distinguir virtudes y falencias a la hora de utilizar un recurso para abordar un contenido matemático, en este caso la demostración. A continuación presento un ejemplo, donde la pregunta principal es: ¿Qué ocurre

con el punto H en las dos figuras siguientes? ¿Cuáles son los beneficios de la situación planteada? A partir de las figuras el lector puede extraer sus propias conclusiones.

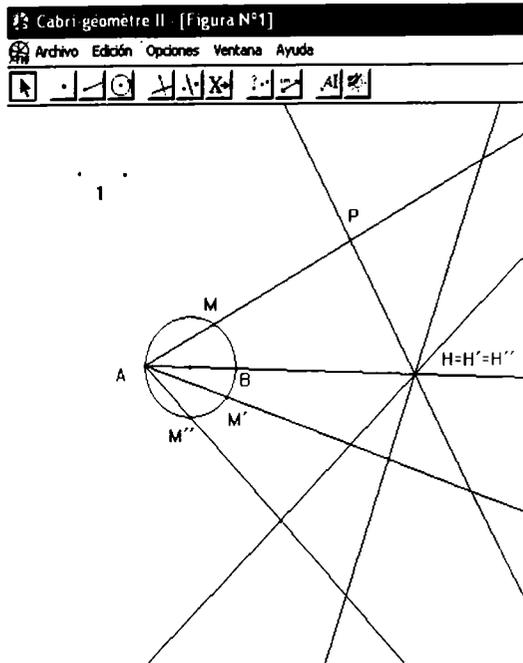
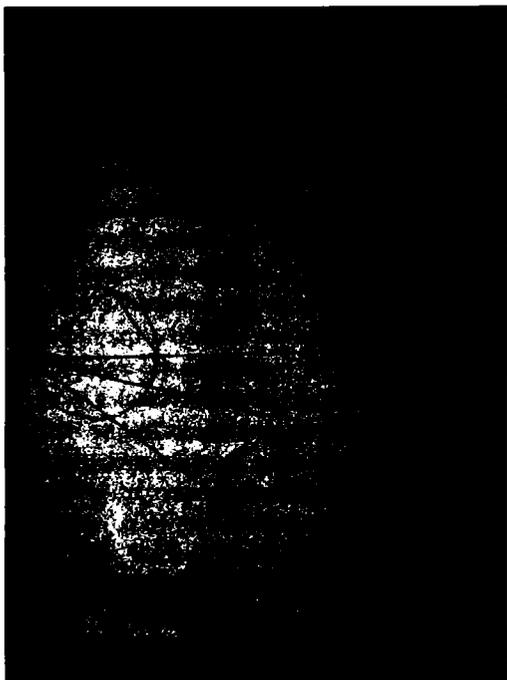
Problema

C es una circunferencia de centro O y radio de 1 cm. \overline{AB} es un diámetro de C, M es un punto cualquiera de C, diferente de A y B. P es el punto de la semirrecta \overline{AM} tal que $m\overline{MP} = 2m\overline{AM}$.

1. Se traza la perpendicular de \overline{AM} en P, que corta \overline{AB} en H, hacer varias figuras, considerando diferentes puntos de M. ¿Qué conjetura puedes hacer sobre el punto H? Para demostrar esta conjetura, mostrar que \overline{PH} es paralela a \overline{MB} , calcular $m\overline{AH}$ y concluir.

2. Sobre qué línea se desplaza P cuando M se desplaza sobre C (Dibujar el lugar).

- Suponemos que $m\overline{MB} = 1$ cm. Hacer una figura, calcular $m\overline{PH}$. P' esta en la proyección ortogonal de P sobre \overline{BH} , calcular $m\overline{P'H}$ y $m\overline{PP'}$.



También se puede considerar una actividad¹ de demostración similar, proponer a los estudiantes trazar y verificar si las bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersectan en un solo punto. Esta actividad para efectos prácticos se puede dirigir con el siguiente gesto didáctico: solicitar a los alumnos que dibujen a mano alzada o con instrumentos, donde lo más probable es que este punto de intersección no sea tan evidente, lo cual obligaría a los estudiantes a verificar la situación planteada.

La idea de la exigencia

Para realizar una revolución² en Chile se debe innovar en un aspecto cultural fundamental, que es despojar de nuestra forma de actuar, la conformidad y el poco rigor al evaluar nuestro quehacer, es así como se debe poner a las alturas de las grandes revoluciones, el motivo ya no es la independencia. El motivo que hoy nos debe reunir como sociedad, es para reorientar nuestra dirección como país y proporcionar a toda la población condiciones igualitarias que les permitan vivir dignamente.

Siempre se sueña con ser parte de una revolución, pero cada vez que se presenta alguna, no se puede adaptar ninguna ocurrida en la historia y ahora que uno siente encontrarse en una posición privilegiada, al recibir del Estado chileno una beca hace sentir que se lleva un compromiso con las personas que han hecho de esto, un sueño hecho realidad, viajar a Francia y conocer lugares maravillosos, hace estar agradecido y

1 Aporte del profesor Roland Pouget en el momento de la presentación.
 2 Me refiero a los cambios sociales evidentes dentro de nuestro sistema social y político

estos agradecimientos son explícitos a la familia, que se ha sacrificado (y lo sigue haciendo), durante años de trabajo en este país; la población chilena que día a día busca un vivir mejor, pues a ellos se debe esta oportunidad.

Es así como en la gestación de nuestra revolución, cobra una importancia fundamental para impulsarla, los profesores, gremio el cual debe solidificar sus bases, lograr la unidad y comprometerse con nuestra población, en primer lugar se debe profesionalizar la labor docente, pero que se note, se tiene que sacrificar tiempo y esfuerzo extra durante las prácticas docentes y apuntar principalmente a la formación de los futuros profesores, debido a que ellos son la herramienta humana para producir material pedagógico y realizar las redes que se necesitan para hacer del proceso educativo, la base de la reconstrucción de nuestro país.

Cómo olvidar que Chile en algún momento estuvo en la vanguardia de la educación en América Latina, esto es una gran referencia debido a que si nosotros surgimos en los temas educacionales también nuestros países vecinos recibirán ciertos beneficios; se sigue la idea de que si el medio mejora, si nuestro entorno es bueno, no tendríamos problemas en aspirar a ser mejores de lo que somos, recordemos lo expuesto en el libro *El Problema nacional*:

“En varias de las conferencias educativas latinoamericanas las innovaciones pedagógicas de Chile fueron examinadas y reconocidas como un estimulante ejemplo. Desde luego, en la reunión de los Ministros de Educación, realizada en Lima, en 1956. Muchos profesores extranjeros, que se educaron en Chile durante aquellos años, como alumnos de la vieja Escuela Normal J.A. Núñez, tuvieron la oportunidad de comprobar prácticamente el nuevo estilo técnico y administrativo por medio del cual comenzaban a extirparse de la enseñanza primaria las tenaces raíces del caudillismo político. Desde 1933 el servicio de educación primaria en Chile adquiría una notable ventaja técnica y administrativa sobre el de la enseñanza secundaria, que continuó adhiriendo a sus antiguas rutinas, prisionero de un ministerio gobernado por toda clase de presiones políticas y confesionales: sólo en 1946 se advierten algunas tentativas de renovación.

Y todo esto se hizo con nuestros propios recursos materiales y humanos, aprovechando la vocación pedagógica de los profesores nacionales, sin contratar expertos foráneos ni hipotecar el espíritu de una enseñanza—que debe ser fundamentalmente chilena— a la concesión, muchas veces condicionada, de una ayuda económica extranjera.”

No podemos desconocer nuestros avances en educación y el trabajo realizado por grandes personajes en este tema, cabe mencionar a uno como es Don Darío Salas, que con su legado y aportes nos deja una base sólida para trabajar en función de los objetivos perseguidos hace casi un siglo. Pero también se debe reconocer que muchos están trabajando en función de la educación chilena, construyendo patria día a día en los establecimientos educacionales, sembrando conciencia de que sí se puede crecer como nación³. Una de las ideas que en el transcurso de la historia se han desechado y hoy vuelven con más fuerzas que nunca, quedando para la reflexión la siguiente frase: “En los que se refiere a las técnicas de supervisión para el perfeccionamiento del profesorado en servicio, don Darío Salas alude, con espíritu realista, a la situación escolar de 1917: No sabemos si los niños de hoy recordarán más tarde a los actuales visitantes de sus escuelas: nos inclinamos a creer que no los recordarán. En nosotros, en cambio, será perdurable la memoria de aquel visitador, señor Gutiérrez, que posiblemente ignoraba muchas cosas que saben o deberían saber sus colegas de ahora, y que, ya anciano, recorría hace 25 años muchas leguas a caballo para llegar hacia nuestra escuela, no a anotar la asistencia o poner una firma, sino a hacernos clases, a imponerse de nuestro adelanto, a aconsejarnos, a presenciar las lecciones de nuestro preceptor y, según parece, también a criticarlas, a juzgar por los colores que asomaban a la cara de este último al salir de la breve conferencia celebrada con el visitador durante la hora de nuestro recreo. Son éstas las visitas que llamamos a la antigua y que pedimos se restablezcan y generalicen.”

Es por eso que se debe crear un plan de acción consistente, todos los proyectos educacionales tienen que tener resultado, y estos deben ser evidenciados, no se puede desperdiciar ningún recurso económico y menos humano, las universidades deben trabajar en colaboración entre ellas y se deben acercar a los establecimientos de enseñanza escolar, para renovar sus prácticas pedagógicas, sin duda que esta relación debe ser recíproca. La difusión del conocimiento debe ser masiva, así como constantemente nos vemos bombardeados por información que no es relevante para la formación de la cultura, se deben considerar recursos para las investigaciones pedagógicas, debemos afianzar relaciones y saber lo que se está haciendo en regiones, la colaboración debe ser intensa, los logros deben ser mostrados a la comunidad de una manera directa, las becas deben ser abiertas sin restricciones, se debe fomentar la postulación, no esconder información, la que se debe divulgar abiertamente. Se debe

³ Una nación es aquella que tiene un espíritu, una solidaridad de todos sus miembros, una conciencia de lo que tienen en el pasado, de lo que viven actualmente, y de nuestros proyectos del futuro. (García, 1941, p. 14). (El Problema Nacional)

motivar esta práctica e insistir constantemente en las posibilidades que existen para los estudiantes de Pedagogía de complementar sus estudios. Es a través de los detalles que la formación como docente se va construyendo paulatinamente, por ejemplo un detalle fundamental dentro de la enseñanza, no se puede fijar una prueba tal día y cambiarla porque los alumnos no se sienten preparados, se debe insistir en la idea de la exigencia, sin caer en actos deshumanizadores, y encontrar la conexión entre la simpatía y la seriedad necesaria para abordar un proceso evaluativo; se necesita actuar consecuentemente y que este actuar se pueda apreciar, para formar personas que se auto-exijan y posteriormente puedan enseñar moralmente con actitudes que contribuyan a desarrollar al máximo el potencial de nuestros estudiantes, ya sea a nivel superior o escolar.

Cuando estaba en París, se preguntaba si Chile era considerado o referenciado en aquel lugar y gratamente se encontró un artículo publicado en el periódico "Le monde", el día 24 de mayo, una noticia que tenía como título "Michelle Bachelet annonce un ambitieux programme social", es decir que se anuncia un ambicioso programa social, también hacía referencia a los *650 millones de dólares destinados para la educación*. Es esperanzador pensar que estas podrían ser las soluciones que Chile necesita, las condiciones están dadas, incluso los estudiantes de secundaria exigen educación de calidad y por eso es necesario incorporar la *idea de la exigencia*, para que los recursos sean ocupados de una manera eficaz, y tal como se tuvo la posibilidad de acceder a estos beneficios con esta hermosa experiencia se debe trabajar fuertemente para que las próximas generaciones puedan vivir una situación similar.

Conclusiones

Es fundamental comenzar a reflexionar los temas tratados en los programas de matemática, en particular el tema de la demostración, ya que sin duda la ambigüedad expuesta en los programas permite la libertad de incluirla o no, es por eso que debemos orientar nuestro trabajo a la reflexión de los conceptos y actividades matemáticas que se quieren enseñar. Pero esto no es todo, falta el ¿cómo? Esto se puede lograr perfectamente con publicaciones mensuales a las cuales el profesor tenga fácil acceso, o un lugar con especialistas donde se pueda acudir para aclarar diferentes dudas en torno a la educación matemática, lo cual permitirá mejorar nuestra práctica docente. Se sabe que se ha hecho mucho y muchas personas han y están participando de manera constante en el mejoramiento de la educación, pero se pueden hacer más cosas, es indispensable crear las redes de apoyos donde todos los estudiantes puedan acceder a trabajos

de investigación de manera uniforme, que estos sean divulgados de manera abierta, y se puedan trabajar concretamente en la sala clase; también se debe dirigir las fuerzas en la formación de los futuros profesores. Un proyecto bastante interesante fue el Fondef D021 1090, correspondiente a los *Estándares para la formación de profesores de Matemática de enseñanza media*, el cual propone desafíos interesantes, aunque no siempre reales, que se deben alcanzar con el tiempo, sin embargo se debe tener cuidado y no salirse de la realidad práctica y de las necesidades que se deben cubrir lo antes posible; son sin duda un sueño que se puede alcanzar, pero con paciencia, falta la etapa de transición para incorporar ciertos contenidos que según nuestra apreciación son bastante profundos; para esto debemos también ser consecuentes y preguntarnos quizás cosas tan simples como: ¿Existe la bibliografía suficiente para que los profesores que no han alcanzado estas competencias sean capaces de alcanzar los niveles deseados en forma autónoma?, y así un sinfín de consideraciones que pretenden ser un aporte constructivo y por ningún motivo criticar alguna situación ya establecida sin presentar soluciones. Se considera que las bases están creadas y se tiene una rica historia matemática poco explotada, se debe ordenar y reorientar un plan país para que se unifiquen las prácticas, conocimientos en torno a la educación matemática, estrechar aun más los lazos que se deberían tener dentro de esta rica comunidad, en donde pueden participar los personajes matemáticos que crean la disciplina y los que la enseñan, con la esperanza de que la idea de la exigencia sea acogida. Para finalizar este artículo, se agradece a todo lo que nos ha correspondido vivir en nuestra formación como docentes, en este hermoso y joven país llamado Chile.

Bibliografía

- De Guzmán Miguel, *Cómo hablar y demostrar en matemáticas*. España: Base universitaria, 2003.
- Hanouch Boris, Agnés Choquer. *Maths 2 reperes*. Francia: Hachete, 2004.
- Programas de estudios de matemática de la educación chilena de sexto básico a cuarto medio vigentes en el año 2007.
- Recherche en didactique des mathematiques, Francia. vol 3, [3], 1982.
- Salas Darío, *El problema nacional*, Chile: Universidad de Chile, Facultad de Filosofía y Educación, 1917.
- Yeterain Alexandre, Hug Barbara. *Du raisonnement a la demonstration*. Francia: Memoria para optar al título de profesor, 2007.