

# FIGURAS DE CHLADNI Y LA ESTÉTICA EN LA FÍSICA

Carlos M. Romo Kröger\* y Angela Romo Cancino\*\*

## Resumen:

Se presentan ejemplos de espectáculos estéticos de la naturaleza que involucran la Física y la Matemática. Se expone la teoría básica de las ondas estacionarias en cuerdas, ecuación de onda y sus soluciones, y su generalización al caso bidimensional. Se discute el caso de las membranas flexibles y las placas rígidas. Se explica la forma de conseguir hermosos diagramas de líneas nodales (figuras de Chladni) formadas sobre placas oscilantes de diversas geometrías y activadas por diversos métodos. En general se trabaja con materiales de uso cotidiano y de fácil acceso. Se describe la experiencia del uso de las placas en la enseñanza de la Física y se discute cómo la motivación que despierta en los alumnos puede aprovecharse para mejorar logros en esta asignatura.

**Palabras claves:** Ondas, modos de vibración, estética, figuras de Chladni, recurso pedagógico.

## Abstract:

It presents examples of aesthetic spectacles of nature involving physics and mathematics. It sets out the basic theory of waves in strings, wave equation and its solutions, and its generalisation to two-dimensional case. It is discussed the case of flexible membranes and rigid plates. It explains how to get beautiful diagrams of nodal lines (Chladni figures) formed on oscillating plates of various geometries and activated by various methods. In general, it works with materials for everyday use and easily accessible. It describes the experience of using the plates in teaching Physics and discusses how the motivation that awakens in students can be taken to improve achievements in this subject.

**Key words:** Waves, modes of vibration, aesthetics, Chladni figures, educational resource.

\* Universidad Católica del Maule, Instituto de Ciencias Básicas, [cromo@ucm.cl](mailto:cromo@ucm.cl)

\*\* Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Departamento de Física [angela.romo@gmail.com](mailto:angela.romo@gmail.com)

## Introducción:

“Todo lo hizo hermoso en su tiempo; y ha puesto eternidad en el corazón de ellos, sin que alcance el hombre a entender la obra que ha hecho Dios desde el principio hasta el fin”.  
Eclesiastés 3:11

La naturaleza nos ofrece los mejores espectáculos para la vista y demás sentidos. Contemplar una puesta de sol, escuchar el canto del zorzal o del ruiseñor, son ejemplos que confirman lo anterior. El fenómeno conocido como aurora boreal está considerado como uno de los mayores espectáculos de la naturaleza y las personas realizan grandes travesías por llegar a verla y por qué no decir, los esfuerzos que se hacen por contemplar la belleza del mundo estelar. Lo que sorprende es que la estética que acompaña a la naturaleza está regida por leyes físicas y matemáticas bien definidas. Unos pocos ejemplos de esto son:

- Las notas musicales; en el mundo occidental, la que satisface mejor nuestro sentido musical es la escala temperada, en que la relación de frecuencias entre una nota y la anterior nota musical es

$$f_n = \sqrt[12]{2} f_{n-1}.$$

Del mismo modo, una nota musical en las distintas escalas (digamos, el do menor, el do mayor, etc.) tendrá frecuencias

$$f = \{f_0, 2f_0, 3f_0, \dots\},$$

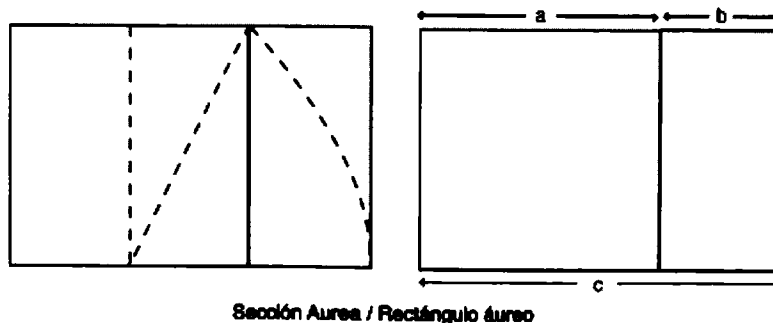
cada una como múltiplo de una frecuencia dada  $f_0$ . Esto es estética, regida por leyes físico-matemáticas.

- La puesta de sol presenta hermosos colores rojo anaranjados debido al mayor poder de refracción que tienen las capas de la atmósfera para los colores

de menor longitud de onda, como el azul y el verde. La luz solar contiene todos los colores. Cuando el sol ya “está acostándose” al atardecer la refracción de la atmósfera hace que las longitudes de onda más cortas “se escondan” más rápido. El menor scattering de la luz de longitudes de onda más cortas también contribuye a realzar este fenómeno.

- El arco iris es un espectáculo visual que ofrece la naturaleza y que a nadie deja indiferente. Este fenómeno se observa cuando la luz del sol incide en gotas de lluvia que caen a la distancia. Al entrar en la gota la luz del sol se refracta, luego se refleja en su interior y finalmente sale de la gota con una nueva refracción. Por la razón de que las longitudes de onda más cortas sufren mayor refracción, la luz violeta emergerá con un ángulo mayor con respecto a la dirección incidente y gradualmente a ángulos menores la luz de mayores longitudes de onda hasta llegar al rojo. Por lo tanto el observador ve el violeta y el azul proveniente de gotas que están más hacia el interior del círculo del arco iris. En cambio el color rojo se verá en el borde exterior del círculo.

- La sección áurea o regla áurea la desarrolló Vitruvio, la autoridad romana en arquitectura. Ideó un sistema de cálculo matemático de la división pictórica, para seccionar los espacios en partes iguales y así conseguir una mejor composición. Se basa en el principio general de contemplar un espacio rectangular dividido, a grandes rasgos, en terceras partes, tanto vertical como horizontalmente. O, explicado de otra forma, bisecando un cuadrado y usando la diagonal de una de sus mitades como radio para ampliar las dimensiones del cuadrado hasta convertirlo en “rectángulo áureo”. Se llega a la proporción  $a:b = c:a$  (ver Fig. 1). Estas dimensiones se mantienen hasta ahora como las estéticamente más aceptadas del diseño moderno.



Sección Áurea / Rectángulo Áureo

Fig. 1. Construcción y dimensiones de un “rectángulo áureo”.

En lo que sigue nos referiremos al estudio de ondas en placas rígidas, a su fundamentación y análisis y a los hermosos diagramas que se pueden lograr, las llamadas figuras de Chladni. Se verá cómo la obtención de estas figuras puede servir como una buena herramienta didáctica en la enseñanza de las ciencias físicas.

### Metodología:

## 1. ONDAS UNIDIMENSIONALES

Las ondas que se verifican en cuerdas o en largos resortes son las llamadas ondas unidimensionales porque se pueden describir en términos de una sola variable espacial, digamos la variable  $x$ . La variable temporal  $t$  está siempre presente en toda onda. De tal forma que la evolución de la onda va a estar descrita en términos de  $x$  y  $t$ .

Cuando un extremo de la cuerda está accionado por un generador de pulsos, un dispositivo que produce perturbaciones transversales periódicas (por ejemplo el modelo PASCO SF-9324, Mechanical Wave Driver, PASCO 2008), y cuando el otro extremo se encuentra fijo lo que se presenta es una “onda estacionaria”. Un esquema del montaje experimental en este caso se encuentra en la figura 2. La onda que se genera avanza hacia la derecha hasta el extremo fijo de la cuerda, se refleja allí lo que se traduce en una onda que se devuelve hacia la izquierda. El resultado de la interferencia de las ondas en la cuerda, la que viaja hacia la derecha y la que viaja hacia la izquierda, es una onda estacionaria con zonas de máxima vibración y puntos de vibración nula (nodos). Estas ondas se presentan a determinadas frecuencias del generador de pulsos. A estas frecuencias bien definidas la cuerda entra en un estado de resonancia, es decir se produce máxima amplitud de vibración de la cuerda. A estos estados se les llama los modos normales de oscilación de la cuerda.

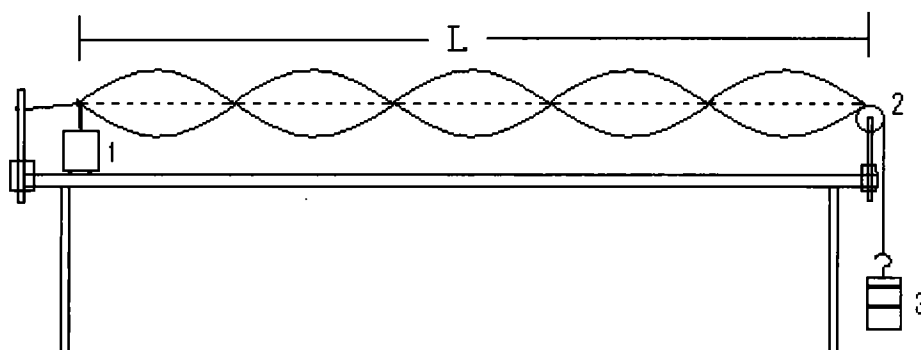


Fig. 2. Montaje para generar la onda estacionaria en la cuerda. Las curvas dibujadas limitan el espacio donde se mueve la cuerda, en que se evidencian los nodos o puntos inmóviles.

En la figura 2 se muestra la cuerda de largo  $L$  vibrando, el generador de ondas (1) en su extremo izquierdo, la polea (2) como punto fijo en su extremo derecho, el cuerpo (3) que cuelga para producir la fuerza de tensión, la mesa, las prensas y las barras. En esta figura aparece la cuerda oscilando en su quinto modo normal de oscilación (cuarto modo secundario).

A través de la Fig. 3 se estudian las longitudes de onda que se relacionan con los distintos modos normales de oscilación de una cuerda, como resultado de las ondas estacionarias que se generan. De las soluciones de la ecuación de onda, y la condición de que la perturbación

sea cero en los extremos de la cuerda, se obtienen los distintos valores posibles del número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

lo que a su vez lleva a los distintos valores de longitud de onda  $\lambda$ .

A partir de los valores de longitud de onda se pueden establecer las frecuencias normales de oscilación de la cuerda.

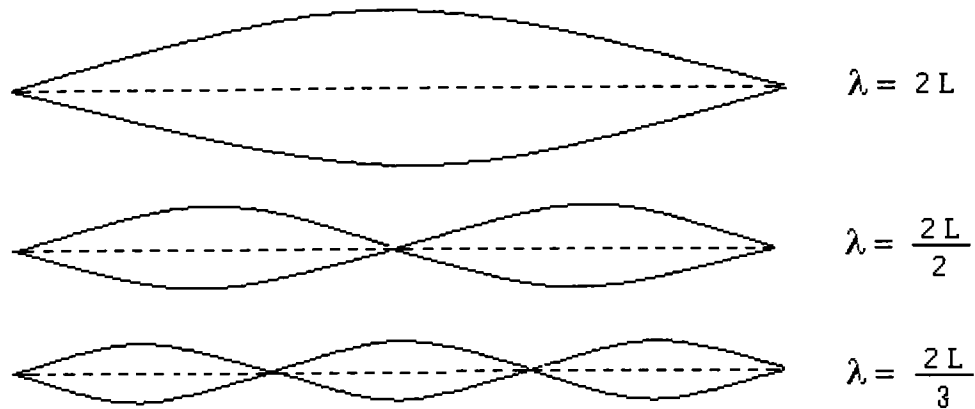


Fig. 3. Los tres primeros modos normales de oscilación de la cuerda, el modo fundamental y los dos primeros modos secundarios.

Tenemos que  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  es la longitud de onda que se produce a una determinada frecuencia  $f_n$ .

Una conocida relación del movimiento ondulatorio es  $u = \lambda \times f$ , con lo que las frecuencias son:

$$f_n = n f_0, \quad \text{con } f_0 = \frac{u}{2L} \quad (1)$$

## 2. ONDAS BIDIMENSIONALES

Varios tipos de ondas bidimensionales existen en la naturaleza. Pensemos en la membrana de un tambor que es golpeada por un percutor. O la perturbación de la superficie en una poza de agua quieta. Ambas situaciones se caracterizan por producir ondas en dos dimensiones u ondas bidimensionales. Se crean frentes de onda que se mueven en el plano, por ejemplo el plano  $xy$ . En este último caso se describe la onda por una función de  $x$ , de  $y$  y de  $t$ .

Se puede observar lo que ocurre con una placa metálica (una cuadrada, una circular, etc.) cuando se acciona ésta por el mismo generador de pulsos periódicos que se utiliza para la cuerda, que se fija a algún punto de la placa. Son ondas estacionarias que se producen por la reflexión de los frentes en los bordes de la lámina. Cuando se esparce arena fina blanca sobre la placa vibrante, lo que se observa es una acumulación sus granitos en las denominadas líneas nodales, debido a que en estos puntos no sufren mayor agitación.

### 2.1 Ondas en Placas y en Membranas

Cuando se habla de vibraciones en dos dimensiones, específicamente en láminas delgadas, se incluye a 1) las **membranas**, un tipo de lámina flexible, generalmente sujeta por el contorno y sometida a una tensión superficial uniforme y 2) las **placas**, o láminas rígidas, generalmente

con contornos libres. El caso típico de membrana es la superficie flexible de un tambor. Aparte del tambor circular, podemos pensar en uno cuadrado o de otra geometría. El caso más simple de lámina rígida es una plano-cuadrada, pero pueden existir plano-hexagonales y hasta láminas cóncavas, como lo es una campana.

Como en el caso de una cuerda vibrante, en que existen ondas estacionarias con sus puntos nodales bien definidos, una lámina que se hace oscilar presenta líneas nodales (sucesiones de puntos de la superficie que se mantienen sin oscilar).

El tratamiento matemático para describir la vibración en membranas y en placas es algo diferente pero presenta características similares.

#### 2.1.1 Modos normales en una membrana rectangular:

Con una deducción análoga al caso de las cuerdas se llega a la ecuación de ondas para las membranas (Ingard, 1966; Coulson, 1944; Averno, 2008), solamente que aquí se trabaja en dos variables espaciales,  $x$  e  $y$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad \text{con } v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2)$$

siendo  $v$  la velocidad de la onda,  $T$  la tensión superficial y  $\rho$  la masa por unidad de superficie.

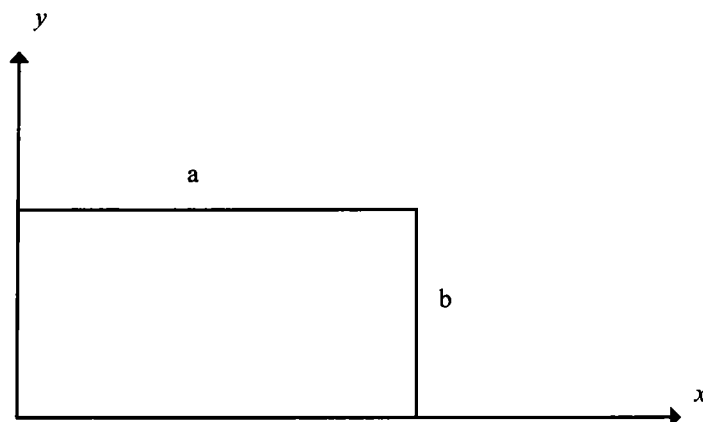


Fig. 4. Membrana vibratoria en un sistema de coordenadas cartesianas

Para una membrana rectangular con contornos fijos, como la de la Fig. 4, se encuentran soluciones a la ecuación (2) del tipo:

$$z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \times \cos \omega t \quad (3)$$

donde la frecuencia es:

$$\omega = \sqrt{\left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \frac{T}{4\rho} \right]} \quad (4)$$

La analogía con la cuerda vibrante pierde sentido cuando nos damos cuenta de que puede haber varias combinaciones ( $m, n$ ) que tienen la misma frecuencia. Se dice que hay una degeneración de los modos de vibración.

### 2.1.2 Modos normales en una placa cuadrada.

Para obtener la ecuación de onda en placas de espesor no despreciable (por ejemplo una placa de acero de espesor 1 mm), es necesario tener en cuenta la rigidez del material. A diferencia de la membrana flexible, aquí aparecen fuerzas de torsión y de cizalladura. Se estudia primero esta ecuación para las ondas transversales en una barra rígida, y se generaliza al caso de dos dimensiones (Cros-Stötter, 2008; Brekhovskikh, 1994).

La ecuación que describe la propagación de las ondas en una barra rígida de sección circular, se obtiene teniendo en cuenta el balance de fuerzas y momentos que actúan sobre una sección infinitesimal cilíndrica, y viene dada por la expresión:

$$\rho I \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^2 \partial x^2} = EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (5)$$

donde  $\xi$  es el desplazamiento transversal,  $\rho$  la densidad del material,  $I$  el momento de inercia de la sección transversal respecto a un eje diametral,  $S$  la sección y  $E$  el módulo de Young.

Cuando las dimensiones transversales de la barra son mucho menores que la longitud de onda de la vibración, se pueden hacer ciertas aproximaciones que llevan a una ecuación simplificada para describir las vibraciones en la barra. Esta nueva expresión simplificada también es de cuarto orden:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r_0^2 \frac{E \partial^4 \xi}{\rho \partial x^4} = 0 \quad (6)$$

donde  $r_0$  es el radio de inercia, que en primera aproximación iguala las dimensiones transversales de la barra. A condición de que un extremo esté fijo y el otro esté libre, la solución general de (6) es del tipo:

$$\varphi(x) = A_1 \cos kx + A_2 \operatorname{sen} kx + B_1 \cosh kx + B_2 \operatorname{senh} kx$$

Lo anterior permite establecer una relación aproximada para la longitud de onda en función del largo de la barra  $L$ :

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n+1} \quad (7)$$

Aunque en el caso de la barra rígida con un extremo libre las ondas no son exactamente sinusoidales (sino que están modificadas por una función hiperbólica), la configuración de sus ondas estacionarias y sus nodos es la misma que para el aire vibrando al interior de un tubo abierto en uno de sus extremos, el caso de un tubo de órgano, por ejemplo. En este caso los modos de vibración, que se conocen con exactitud, tienen longitudes de onda dadas por (7).

La generalización de la barra rígida al caso bidimensional (placa rígida) es análoga a la generalización de la cuerda al caso de la membrana flexible. Si  $\psi(x)$  es la solución de la ecuación de ondas unidimensional, las funciones de onda bidimensionales se pueden escribir como:

$$\psi_{mn}(x, y) = \psi_m(x)\psi_n(y) \quad (8)$$

con su correspondiente frecuencia  $w_{mn}^2 = w_m^2 + w_n^2$ . Lo que indica que para un determinado par  $(m, n)$  hay dos modos de vibración posibles. Se dice que hay degeneración.

### Resultados y discusión:

Las soluciones de la Ec. (8) son similares a las de la Ec. (3). Para el caso de  $m = 1$  y  $n = 2$ , esta solución se representa en el primer cuadro de la figura 5. En el segundo cuadro de esta figura se representa la solución para  $m = 2$  y  $n = 1$ . Estos dos modos, aparecerán para una misma frecuencia  $f_{12}$ . Estos modos son representados en la figura 5 junto con su superposición (tercer cuadro) y el diagrama final de líneas nodales (último cuadro). Por simplicidad se impone contornos fijos para la placa, aunque la situación no es muy diferente para contornos libres.

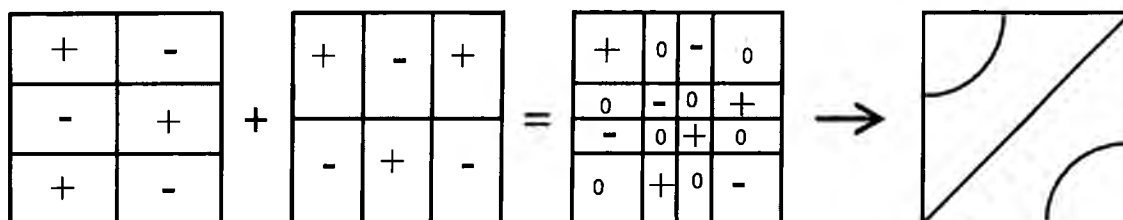


Fig. 5. Superposición de modos degenerados y diagrama final en una placa cuadrada.

En las membranas y sobre todo en las placas no se pueden observar visualmente estos patrones de interferencia debido a sus frecuencias altísimas y amplitudes muy pequeñas, mientras la deformación de la placa o la membrana sea mayor (modos superiores de vibración) la amplitud de vibración será menor (es aun más complicado observar visualmente el fenómeno).

Lo que se hace comúnmente es esparcir arena fina sobre la placa o membrana, de tal forma que al vibrar,

las zonas antinodales desplacen a la arena, debido a su movimiento hacia las líneas de vibración nula o líneas nodales. Al quedar la arena depositada en las líneas nodales, se observan espectaculares obras artístico-visuales nuevamente de autoría de la naturaleza.

Hoy en día gracias a los avances tecnológicos son diversas las técnicas que nos permiten observar patrones, incluso en superficies cóncavas y convexas como la piezoelectricidad y la holografía.



Fig. 6. Figuras de Chladni obtenidas con placas de distinta geometría

Retomando el caso de las placas planas y horizontales, en la figura 6 se muestran algunos de los resultados obtenidos a partir de diferentes formas de hacer que la placa entre en resonancia. En esta figura se observan diferentes diagramas de Chladni obtenidos por medio de variadas técnicas. En la primera imagen de esta serie

se observa un diagrama de interferencia para una placa cuadrada, que entra en resonancia a través de un generador de pulsos PASCO apernado en el centro. El segundo y cuarto diagrama se obtuvieron rozando el borde de la placa con un arco de violín, en tanto la placa circular se accionó con la emisión sonora de un parlante.

Una placa circular fija en el centro y placa cuadrada fija en un punto de uno de sus bordes se hacen entrar en resonancia con el sonido de un parlante cualquiera cercano a estas, de preferencia por arriba. A ciertas

frecuencias comienzan a vibrar, con amplitudes más altas se facilita el desplazamiento de la arena, basta con mantener sobre la placa el parlante unos segundos para que se formen hermosas figuras (Fig. 6).



Fig. 7. Diagramas obtenidos en placas al vibrar con el sonido de un parlante.

Se confeccionó en forma artesanal una placa hexagonal, fija en el centro a través de un tornillo y un soporte de madera, esta placa entró en resonancia a través del frotamiento en uno de sus bordes con un arco de violín, que puede perfectamente ser reemplazado por un arco artesanal hecho de hilo de pescar. Las diferentes figuras que aparecen dependerán de diversos factores, la tensión en el arco, el punto y la fuerza con que se frota el arco. El último factor a mencionar es algo más conflictivo. Esto es, cuán firme esté apernado el centro de la placa que se sostiene con un tornillo y una golilla. Cada vez que se suelte o apriete el tornillo, si se utiliza una golilla de goma o metálica, cambian las características de la placa. Por tanto los modos de oscilación de ésta serán distintos y aparecerán figuras diferentes. Algunos de los diagramas obtenidos se encuentran en la Fig. 7.



Fig. 8. Diagramas obtenidos en una placa hexagonal con frecuencias crecientes.

Una de las formas más simples de conseguir estos diagramas con la misma técnica del frotamiento, se logra usando una espátula del tipo empleado en la construcción, la que se pinta de negro para hacer contraste con

la arena. Tomada por su mango presenta un punto fijo al medio de uno de sus bordes. También para hacer la experiencia más sencilla, se puede utilizar sal común. Para enriquecer su belleza se utilizan sales de colores o cuarzo decorativo, lo importante es usar un granulado fino. Las figuras obtenidas con esta placa trapezoidal siguen sorprendiendo (Fig. 8).



Fig. 9. Diagramas obtenidos en una espátula con frecuencias crecientes.

Para abordar el tema de las ondas y el sonido con distinto grado de profundización y en diferentes contextos, se han hecho diversas experiencias con alumnos de nivel medio y universitario y público en general. Los participantes han visto cómo se forman estos patrones, e incluso ellos han hecho entrar en resonancia a las placas (Fig. 9). Nadie es indiferente, el factor común en el público es el asombro ante tan bello espectáculo que se va construyendo en vivo. En este proceso se puede establecer una relación entre las características del sonido y las figuras que se forman.



Fig. 10. Alumnos experimentando con una placa hexagonal después de una exposición sobre "el sonido como onda"

### Conclusiones:

Es altamente valioso el aporte que el estudio de los modos normales de vibración en membranas y placas puede significar en los aprendizajes del área de ondas y acústica y de la Física en general. En primer lugar, el asombro que provoca en los alumnos el ver aparecer los diagramas de Chladni produce la motivación necesaria para hacer más significativo el aprendizaje. Las placas son un instrumento fácil de conseguir, cotidiano y cercano a los alumnos. Impacta la manera en que la estética de estas figuras asombra a quienes incluso se sienten desinteresados por esta área científica. Este asombro debe ser aprovechado para incentivar la enseñanza de

la Física en esta materia. Los observadores se sienten motivados a querer saber más acerca del fenómeno. Están más receptivos y dispuestos a construir el conocimiento. La motivación de los alumnos se debe aprovechar no tan solo para el conocimiento específico de la Física del movimiento vibratorio en placas, sino también para una aceptación de esta asignatura, que normalmente se vuelve tediosa por la falta de recursos pedagógicos y otras muchas razones.

### Bibliografía:

- Brekhovskikh, L. M. y V., *Wave Phenomena. Mechanics of Continua and Wave Dynamics*, Ed. Springer, Berlín 1994.
- Coulson, C.A., *Ondas*. 4a. Ed., Dossat, Madrid, 1944.
- Cros Stötter, A., Cantarero A. y Ferrer Roca, C., *Vibraciones en dos dimensiones*, <http://www.uv.es/cros/docencia/mecanica/p14%20vibraciones%20en%20dos%20dimensiones.pdf> , 2008.
- Ingard, U. y Kraushaar, W., *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*, Reverté, Barcelona, 1966
- Kverno D. and Nolen J., *A study of vibrating plates*, <http://www.phy.davidson.edu/StuHome/jimn/chladni/pages/theory.htm> , 2008.
- PASCO Physics, Catalog and Experiment Guide, 2008-2009.