REPORTE DE MEMORIA DE TÍTULO PARA PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA. UNA INVESTIGACIÓN EN BIOMATEMÁTICA.

Fernando Córdova-Lepe*, Pedro Córdova-Fernández P.**

Resumen

Este artículo informa de resultados obtenidos en una memoria de título de un par de estudiantes de pedagogía en matemática de enseñanza media del sistema educacional chileno. Consideramos que dicho trabajo tiene el mérito de ser una experiencia exitosa y poco usual en Chile, en cuanto a significar desafíos dirigidos de profundización y de investigación en problemáticas abiertas y de carácter interdisciplinario en líneas emergentes, como lo es la Bío-economía Matemática. Esto es, el intentar describir, comprender y predecir (vía la construcción de modelos matemáticos de la dinámica) fenómenos relativos al manejo de recursos naturales que necesitan la concurrencia de elementos conceptuales de la biología, la economía y por supuesto la matemática, para su estudio. Esta memoria de título, pasa a ser un buen ejemplo del potencial de trabajo investigativo de los estudiantes, cuando estos han incorporado suficientes herramientas teóricas básicas, en nuestro caso, algunos elementos conceptuales básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y de las sucesiones por recurrencia. Un trabajo que pone a dos nuevos profesores secundarios, aportando ante la principal característica que debe tener el conocimiento científico, esto es, el desarrollo de nuevo conocimiento.

Palabras Claves: Memoria de título, modelamiento matemático, conocimiento interdisciplinario, cosecha, manejo de recursos naturales.

Abstract

This article reports the graduate thesis of a couple of students of a program to form mathematics teachers for the secondary level of the Chilean education system. We believe that such work has the merit of being an unusual and successful experience in Chile. On the meaning of it represents new challenges towards deepening the research in yet open problems of interdisciplinary emerging lines, as the Bio-economy Mathematics. That is, attempting to describe, understand and predict (via the construction of mathematical models of the dynamics) phenomena relating to natural resource management, which need the concurrence of conceptual elements of biology, economics and mathematics for study. This memory title becomes a good example of the potential of research work of students, when they have built enough basic theoretical tools, in our case, some basic conceptual elements of the theory of ordinary differential equations and succession by recurrence. A work that puts two new secondary teachers doing contributions to the main feature that must have scientific knowledge, namely the development of new knowledge.

Key Words: Graduate thesis, mathematical modelling, interdisciplinary knowledge, harvest, natural resource management.

Instituto de Ciencias Básicas, UCM, Talca, Chile. [fcordova@ucm.cl]angela.romo@gmail.com
Departamento de Matematica, UMCE, Santiago, Chile. [cordova.pedro@gmail.com]

Recibido 22mayo 2008; **aceptado** junio 2008

1. Introducción

La Ley de Educación del Estado de Chile, vigente a la fecha, en cuanto a los Objetivos Fundamentales de la Educación Media, para la Formación General en el Sector de Matemática, realiza una declaración introductoria desde la cual es posible deducir una alta valoración de la disciplina. Ésta destaca claramente el potencial de los procedimientos matemáticos para explorar el mundo de lo cualitativo y predictivo. Esta ley también resalta el carácter fundamental de la disciplina como histórica creación del ser humano y le reconoce ser parte importante de su acervo cultural. Rescata además el potencial de sus herramientas conceptuales, para comprender y resolver situaciones de variada procedencia, en particular las problemáticas de las ciencias naturales y sociales.

La literatura propone mostrar al futuro educador matemático secundario evidencias de cómo la matemática es una herramienta para la comprensión del medio natural, mediante la presentación de carácter introductorio, de un cuerpo teórico concreto, como lo es la Bioeconomía Matemática (Córdova-Lepe, 2005). Actualmente, se acepta que el marco curricular debe enfatizar aspectos formativos y funcionales de la matemática, la intención es dar conocer la factibilidad de llevar esa experiencia, que se denomina inter-tri-disciplinaria para la formación docente, a un grado máximo. Llama la atención el que un par de estudiantes realicen una memoria de título (muy próxima en sus logros a una tesis para optar a una maestría) conducente al grado de Licenciado en Educación y Pedagogía en Matemática y obtengan resultados que son un aporte, que probablemente no revolucionarán ni impactarán a la comunidad científica internacional asociada a la disciplina, pero que tienen el mérito de ser muy concretos y originales, en Bioeconomía Matemática. Los logros bioeconómicos del trabajo han sido a la fecha comunicados en el VII Encuentro Chileno de Biomatemática, BIOMAT VII, marzo de 2007, PUCV, Valparaíso, Chile. En cuanto a su interés para la Educación Matemática, esta memoria fue expuesta en la sesión de Educación Matemática de las XXI Jornadas de Matemática de la Zona Sur, abril de 2007, Concepción, Chile.

El objetivo de este trabajo, es dar a conocer a quienes participan de la responsabilidad de formar futuros profesores de matemática, hasta que sitial, con la tarea de facilitadores, pueden llegar los estudiantes en cuanto a la calidad del saber matemático incorporado y su rol en lo interdisciplinario. Quienes se han formado como profesores, así la literatura lo señala, tenderán a reproducir las prácticas pedagógicas de sus maestros. Es lugar común señalar que quienes se involucran en la formación de profesores constituyen reales modelos de conducta, por lo mismo, el ejercicio de no limitar las posibilidades de los estudiantes, a la larga es la posibilidad de no frenar la expresión del potencial de niños y jóvenes en las aulas, y por ende a futuro el de la sociedad. Que estudiantes de pedagogía, no excepcionales en su rendimiento promedio en la carrera, se involucren con las herramientas matemáticas a su alcance con éxito en la generación de conocimiento nuevo parece ser un sueño, y solo una buena intención, pues bien interesa informar que aquello es alcanzable, incluso sin mayores costos, ni transformaciones que revolucionen la burocracia del sistema formativo. En este caso al Departamento de Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile. Una unidad académica cuyo quehacer principal es la formación en la carrera de Licenciatura en Educación y Pedagogía en Matemática, con diferentes menciones de salida. Es decir, un lugar en que la investigación en matemática pura o aplicada, salvo excepciones, no es la actividad usual de sus académicos.

Está bien documentado, desde la Didáctica de la Matemática, que no es posible, tener éxitos de aprendizaje en las aulas desligando el contenido matemático de las temáticas y contextos medio ambientales y culturales de interés del alumnado. Se requiere en los procesos de entendimiento conectar recurrentemente lo conceptual y lo procedimental, con la realidad; como también ligar las relaciones intuitivas y experimentales con las proposiciones formales. No es de esperar que el fututo docente tenga las competencias para dicho desarrollo matemático en contextos, si esta no es una actividad que forme parte importante de su formación. El sello que al respecto puede llegar a marcar un trabajo de memoria de título que incursiona en la contextualización, y en lo interdisciplinario, es una oportunidad que en general las unidades formadoras no deben desperdiciar.

Tema de vital interés, en la estructuración de las economías nacionales en desarrollo, concierne a la problemática de la sustentabilidad en los procesos relativos a la explotación de nuestros recursos naturales. La disciplina preocupada de conjugar y armonizar la relación entre explotación y preservación es la Bioeconomía. Cuando la matemática es la herramienta, que aporta su carácter objetivo y riguroso por excelencia, para la construcción de modelos que permitan describir, comprender y predecir la dinámica de estas fenomenologías, acuñamos al nombre de este sector del conocimiento el calificativo de Matemática, término que al parecer, hizo aparición con el ya clásico libro de C. Clark (Clark,1990).

En la Sección 2 se hace una introducción a algunos elementos de Bioeconomía Matemática necesarios para la lectura de la Sección 3, apartado que corresponde a un resumen del trabajo de Memoria de Título en referencia.

2. Elementos Previos de Modelación Bioecónomica.

Se debe recordar primero que un modelo es un bosquejo o esquema de una realidad, y que este por lo común se inicia a través de un aislamiento meramente intelectual (y en esto el simbolismo matemático tiene mucho que decir) que fija la atención de la psiquis, en algunos hechos y elementos que interesan de dicha realidad y no en toda la realidad del suceso en estudio. El método consiste en reconocer y elegir las variables, que la experiencia indica, que influyen directamente en el fenómeno, siempre y cuando se reconozcan estar relacionadas con las inquietudes que interesan responder. Lo que articula y define el potencial de un modelo es el fijar relaciones de causalidad entre las variables. Inferir en términos lógicos las consecuencias del modelo propuesto es un trabajo de tipo matemático. Finalmente se pretende una interpretación de las deducciones obtenidas del modelo, esto es, contrastar con las observaciones empíricas para hacer de estas, conclusiones de la realidad misma. Se sabe que un modelo teórico de tipo matemático puede resultar lo suficientemente complejo para permitir un análisis matemático de tipo deductivo, que permita estructurar proposiciones generales, para una amplia región de valores en el espacio de parámetros o también de la variable que es el estado del modelo. Las tecnologías de cómputo y de procesamiento de datos permiten la construcción de modelos de simulación del modelo teórico.

La principal lectura que los memoristas realizaron fue la publicación de Córdova-Lepe (Córdova-Lepe,2006), y se les desafió a contestar el tipo de inquietudes que el texto propone para algunos modelos básicos, pero con ecuaciones de evolución ligeramente distintas, en la idea que después incursionaran en casos algo más complejos. En esta sección se resume algunos de los resultados de dicho texto, y también los elementos y construcciones preliminares que los estudiantes debieron comprender y desarrollar. Otro texto clave es el primer capítulo publicado por Clark (Clark,1990) , donde se encuentran los objetos conceptuales propios de la Bioeconomía y con una matemática al alcance de los alumnos pregraduados.

La memoria se situó en el caso de un recurso natural, cuya biomasa evoluciona bajo una ley de crecimiento exponencial, es decir, el clásico Modelo Maltusiano. Sin embargo, el desafío fue considerar que se ha sumado la condición de existencia de un nivel mínimo de abundancia de la población para que éste exprese una tasa de crecimiento positiva, es decir, se incorporó un tipo de efecto conocido como Efecto Allee (Allee,1931).

Cuando asociado a un recurso hay una industria con capacidad de "abundantes" cosechas en "corto" tiempo, es posible considerar que la función de biomasa presenta una discontinuidad en ese "corto" intervalo de tiempo. Intervalo que ahora colapsamos a un instante, esto es, como un punto en el eje del tiempo. Se dice que en tales puntos la cosecha es impulsiva.

La importancia de la construcción de modelos en Economía de Recursos Naturales, está entre otras razones, en la posibilidad de ejercer un control sobre la evolución de la biomasa. Sin duda interesa privilegiar un punto de vista conservacionista, esto es, el uso del recurso de manera que sea biológica y económicamente sustentable. Lo anterior se refiere a mantener niveles de producción al largo plazo, sin necesariamente alterar la abundancia de la biomasa.

En Ecología de Poblaciones, la abundancia se modela matemáticamente de muy diversas formas; el modo más simple fue originalmente introducido, por Thomas R. Malthus en 1798. Él afirma: "Si el ritmo de crecimiento de la población es proporcional a la población presente, entonces la población crece exponencialmente". La simplicidad de este modelo radica en varias idealizaciones: que la población no está estructurada y se considera homogéneamente distribuida; que las tasas de natalidad y mortalidad se consideran constantes; y que la población es cerrada, en el sentido que no hay flujos migratorios. La ley de evolución en este modelo es la básica ecuación diferencial ordinaria $x' = Rx$, en que $x(t)$, función del tiempo, es de valores no negativos y representa el tamaño poblacional en el instante t. Si N y M son las tasas de natalidad y mortalidad unitarias, entonces $R = N - M$. Si se considera t_0, tiempo inicial, la ecuación tiene por solución a $x(t) = x(t_0)\exp[R(t - t_0)]$. Solución que determina tres escenarios para el comportamiento futuro del tamaño de la población: Si $N < M$ (i.e., $R<0$), entonces a futuro la población tiende a la extinción. Por otro lado, si $N = M$ (i.e., $R=0$), entonces la población no varía. Finalmente, si $N > M$ (i.e., $R > 0$), entonces se tiene el crecimiento exponencial.

Cuando los recursos están bajo libre explotación un problema recurrente es la dramática disminución a mediano o largo plazo de las abundancias de éstos. Es necesario introducir políticas de manejo, estas son soluciones que van desde el otorgar derechos de propiedad por concesión a privados hasta, manteniendo el acceso universal, regular los tiempos de cosecha, las técnicas, o sencillamente el monto de lo capturado. Revisemos la opción de exigir a la industria el esperar ciertos períodos entre cosechas, para permitir que la biomasa se recupere, i.e., introducir las denominadas vedas, pero simultáneamente exigir el no incrementar el esfuerzo desplegado en cada instante en que se permita el acceso.

En la Figura 1 se representan los cambios que podrá sufrir el tamaño de una población expuesta a ciertas extracciones en los instantes t_0, t_1, t_2 y t_3.

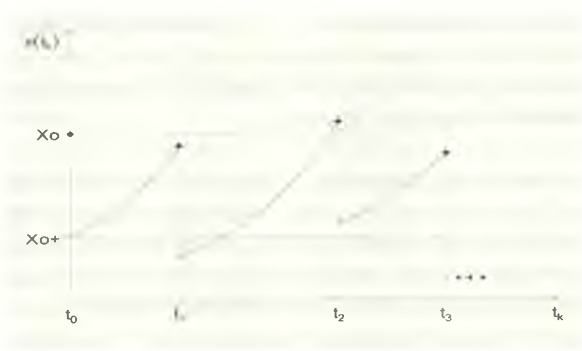


Figura 1: Evolución de la biomasa

Bajo estos supuestos, de intervalos de veda e instantes de extracción, si H es la cosecha realizada en un tiempo t, entonces $H = x(t) - x(t^+)$ es la diferencia entre la población antes de la cosecha y la población tras la cosecha, como es usual $x(t^+)$ denota el límite de la función por la derecha, hacia t.

Uno de los problemas de gestión es determinar la relación existente entre abundancia, esfuerzo y cosecha. Un supuesto simple al respecto es asumir la llamada Hipótesis de Schaefer, esta es, $H / E = q \cdot x(t)$, (Schaefer,1956). En otras palabras "la captura por unidad de esfuerzo es proporcional a la población existente". Donde la constante de proporción q es llamada coeficiente de capturabilidad (resistencia de la especie a ser capturada) y E se refiere al esfuerzo que se realiza para la captura, el cual se considera constante y representa un parámetro positivo que reúne todos los "inputs" involucrados en el proceso extractivo. Es importante hacer notar que una restricción necesaria es $qE < 1$

La memoria se apoya en otra consideración: controlar los intervalos de veda haciéndolos depender de los montos cosechados. Podemos observar que la cosecha se realiza en determinados tiempos t_k, donde $k \in z^+$(los enteros positivos), por lo tanto, el valor $t_{k+1} - t_k$ representa la longitud de veda. Una pregunta con intenciones de sustentabilidad es: ¿Si realizo una cosecha, cuánto tiempo se ha de esperar para volver a hacer otra? Un razonamiento lógico a esa inquietud, podría ser: si la cosecha es abundante, la Hipótesis de Schaefer asume que hay un buen nivel de biomasa y, por lo tanto, es posible esperar un período corto para volver a cosechar. Por el contrario, un bajo nivel de cosecha, se debería a una escasez en la biomasa, por lo que debemos esperar más tiempo hasta la próxima cosecha. Es posible conjeturar que este control nos lleve a una dinámica de sustentabilidad. De hecho uno de los autores de ese trabajo (Córdova-Lepe,2006) propone la siguiente hipótesis de control para las longitudes de los períodos de no cosecha:

$$t_{k+1} - t_k = \alpha / [q \cdot E \cdot x(t_k)]$$

En esta expresión α representa el tiempo de veda por una unidad de cosecha. De modo que de capturar el doble se espera la mitad del tiempo, y de capturar un tercio se esperará el triple antes de cosechar nuevamente.

La conjunción de Crecimiento Maltusiano, Cosecha Impulsiva bajo Hipótesis de Schaefer, y Vedas inversamente proporcionales a la Captura, forma un tipo de ecuación diferencial,que llamada Impulsiva en Tiempos Impulso Dependientes (Córdova-Lepe, 2007), denotada por

$$\begin{cases} x'(t) = Rx(t) & , si\ t \neq t_k \\ x(t+) = x(t) - qEx(t) & , si\ t = t_k \\ \Delta t_k = \dfrac{\alpha}{qEx(t)}. & \end{cases} \quad (1)$$

¿Dado un nivel de esfuerzo, existe un nivel de biomasa que vuelve a ser el mismo, inmediatamente antes de la siguiente captura? Ver Figura 2.

Figura 2: Evolución periódica de la biomasa.

Para buscar un equilibrio, se requiere una solución periódica $x(t)$ de la ecuación impulsiva, que tenga una biomasa $\bar{x}$ en t_{k+1} y en t_k. Esto es:

$$\bar{x} = x(t_{k+1}) = x(t_k). \quad (2)$$

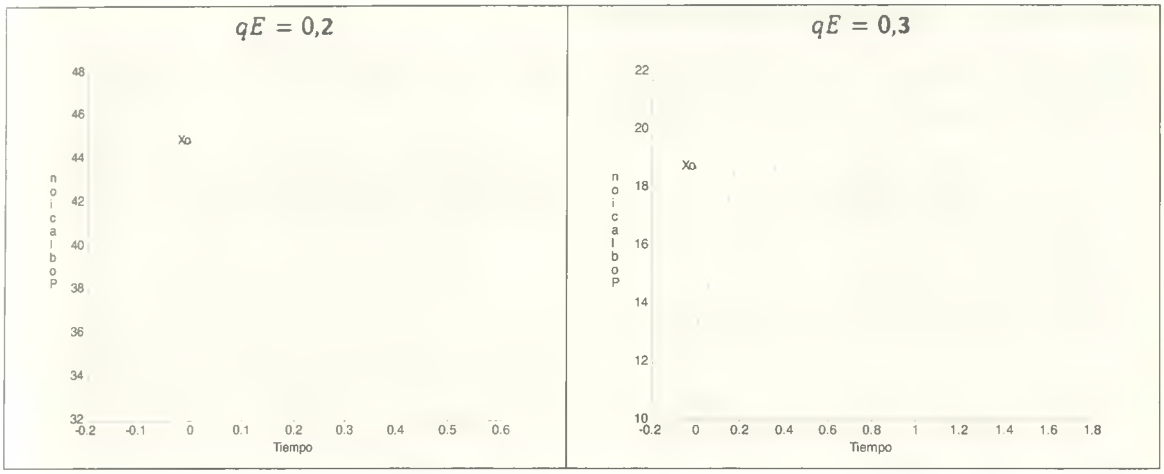
Pero sabemos que:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k)(1-qE)\cdot\exp[R\alpha/qEx(t_k))] \quad (3)$$

Entonces reemplazando en (2) se tiene:

$$\bar{x} = R\alpha/qE \cdot \text{In}[1/(1-qE)] \quad (4)$$

Encontrar equilibrios es importante pues estos representan la población inicial necesaria para que el sistema tenga un comportamiento periódico en el tiempo. Nótese que $\bar{x}$ depende directamente del esfuerzo que se realice, esto significa que para cada nivel de esfuerzo que se aplique existe una población inicial que sometida a la política de cosecha presenta un comportamiento periódico. En la Figura 3 se ilustra este comportamiento.



Durante 5 períodos | Durante 10 periodos

Figura 3: Solución de la ecuación (1) con R=2 y α=1.

No basta encontrar un equilibrio para (1), para la sustentabilidad necesitamos estabilidad. Es decir, que trayectorias vecinas a la periódica sigan cercanas en el tiempo.

Las biomasas en instantes de cosecha consecutivos t_k y t_{k+1} están relacionadas por la recursión (3). El cambio $x(t_k) = a_k$, permite trabajar la recursión como sistema dinámico discreto, a saber, $a_{k+1} = f_E(a_k)$, donde $f_E(a) = a[1 - qE] \cdot \exp[R\alpha/(qEa)]$. El estado de equilibrio $\bar{x}$ será "estable" para la recursión, estabilidad que hereda la trayectoria periódica de (6), si $|f'_E(\bar{x})| < 1$. Es decir, cuando:

$$|(1-qE) \cdot \exp[R\alpha/(qE\bar{x})] \cdot [1 - R\alpha/(qE\bar{x})]| < 1 \qquad (5)$$

Pero $\bar{x}$ está dado por (4). Al reemplazar en (5) se tiene $|(1+\ln(1-qE)| < 1$. De esta forma al despejar qE en la inecuación se obtiene el intervalo de valores para un comportamiento estable, a saber:

$$0 < qE < (1 - \exp[-2]) \approx 0{,}865$$

La estabilidad de la solución periódica de (1) se aprecia en la Figura 4 y la Figura 5, la trayectoria curva inferior y superior respectivamente es la periódica y se puede observar como atrae una vecina.

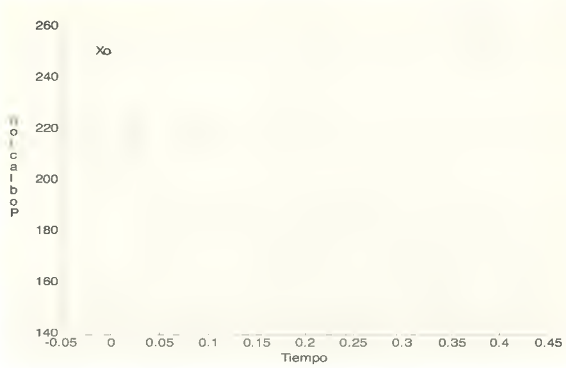


Figura 4: Solución periódica estable de (1) para qE=0,2; durante 8 periodos y con una población inicial mayor a la que presenta la solución periódica.

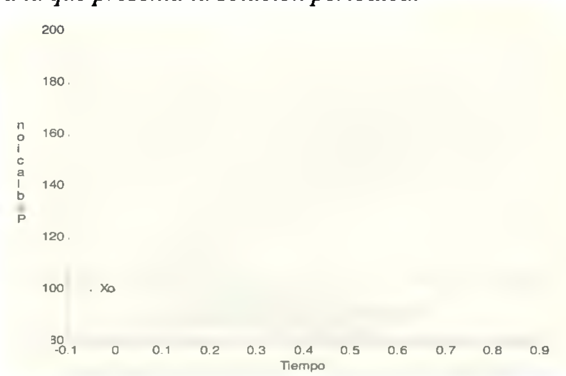


Figura 5: Solución periódica estable de (1) para qE=0,2; durante 12 periodos y con una población inicial menor a la que presenta la solución periódica.

Un nivel de esfuerzo determina una trayectoria periódica estable, la que a su vez a largo plazo determina la dinámica. ¿Cómo alcanzar un nivel de captura óptimo? Debemos optimizar la captura por unidad de tiempo $\hat{H}$ versus un esfuerzo por unidad de tiempo $\hat{E}$, es decir, la frecuencia de cosecha versus el ritmo de esfuerzo desplegado. Lo anterior obliga a estudiar la derivada

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{E}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \hat{E}} \tag{7}$$

Para calcular (7) se sabe que:

1) La captura estable por unidad de tiempo $\hat{H}$ es igual a:

$$\hat{H} = \frac{qE\bar{X}(E)}{\Delta s} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)[qE\bar{X}(E)]^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[\frac{-qER\alpha}{qER\ln(1-qE)}\right]^2$$

que simplificando se tiene, $\hat{H}=R^2\alpha/\ln^2(1-qE)$. Por lo tanto $\partial\hat{H}/\partial E$ es:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial E} = \frac{2R^2aq}{(1-qE)\ln^2(1-qE)} \tag{8}$$

2) El esfuerzo por unidad de tiempo $\hat{H}$, está dado por:

$$\hat{E} = \frac{E}{\Delta s} = \frac{E}{\left[\frac{\alpha}{qEx(E)}\right]} = \frac{qE^2\bar{X}(E)}{\alpha} = \frac{qE^2}{\alpha}\,\frac{-Ra}{qE\ln(1-qE)}$$

al simplificar queda, $\hat{E} = RE/\ln(1/[1-qE])$.

Sabemos que E se encuentra en el intervalo$[0,1/q]$, entonces cuando $E \rightarrow 0$, tenemos que $\hat{E} \rightarrow R/q$. Además si $E \rightarrow 1/q$, entonces $\hat{E} \rightarrow 0$. En la Figura 6 se puede apreciar el comportamiento de $\hat{E}$.

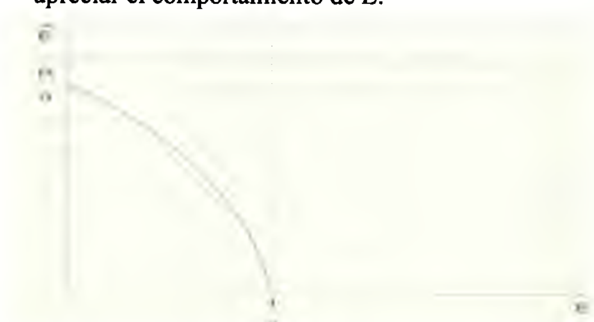


Figura 6: Esfuerzo por unidad de tiempo v/s Esfuerzo.

Como $\hat{E}$ está en función de E se puede derivar implícitamente con respecto a $\hat{E}$, por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{E}} = -\frac{(1-qE)\ln^2(1-qE)}{[(1-qE)\ln(1-qE)+qE]\,R} \tag{9}$$

Finalmente desde (8) y (9) tenemos que la derivada de la captura por unidad de tiempo $\hat{H}$, versus el esfuerzo por unidad de tiempo $\hat{E}$ está representada por:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{E}} = -\frac{2Raq}{\ln(1-qE)[(1-qE)\ln(1-qE)+qE]} \tag{10}$$

Para el análisis del signo la función (10), recurriremos al cambio de variable $u=1-qE$, luego:

$$\operatorname{sgn}(\partial \hat{H}/\partial \hat{E}) = \operatorname{sgn}[((u-1)\ln u)/u \tag{11}$$

De esta manera en (11), si $f(u)=\ln(u)$ y $g(u)=(u-1)/u$, tenemos $f(1)=g(1)=0$ y además $f'u)=1/u<g'(u)=1/u^2$. Como $u=qE\in[0,1]$, entonces $f(u)>g(u)$, por lo tanto, $\partial\hat{H}/\partial\hat{E}>0$.

De modo que la captura estable por unidad de tiempo se hace mayor cuando el esfuerzo por unidad de tiempo se hace mayor. Se debe recordar que $\hat{E} \rightarrow (R/q)^-$, o equivalentemente $E \rightarrow 0^+$, condicionado (para la estabilidad) a ser menor que $[1-e^{-2}]/q$. Ver Figura 7.

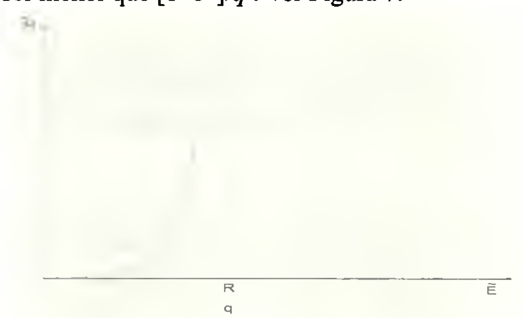


Figura 7: Captura por unidad de tiempo vs Esfuerzo por unidad de tiempo

Una posible interpretación bioeconómica de este resultado es que mientras menor sea el esfuerzo en cada captura, mayor es el esfuerzo por unidad de tiempo, lo que a su vez implica que la captura sustentable por unidad de tiempo sea también mayor.

En la Figura 8 se presentan cuatro gráficos con distintos niveles de esfuerzos, donde se compara la captura promedio y verificamos que para esfuerzos menores esta es mayor. Además en la Figura 9 se presentan dos soluciones numéricas del modelo (donde $qE\in[0,1]$ y $R\in]0,2[$), y se puede apreciar que a menor esfuerzo la captura es mayor, lo que reafirma el resultado obtenido.

Los parámetros son x_0=100,R=2, α=1.

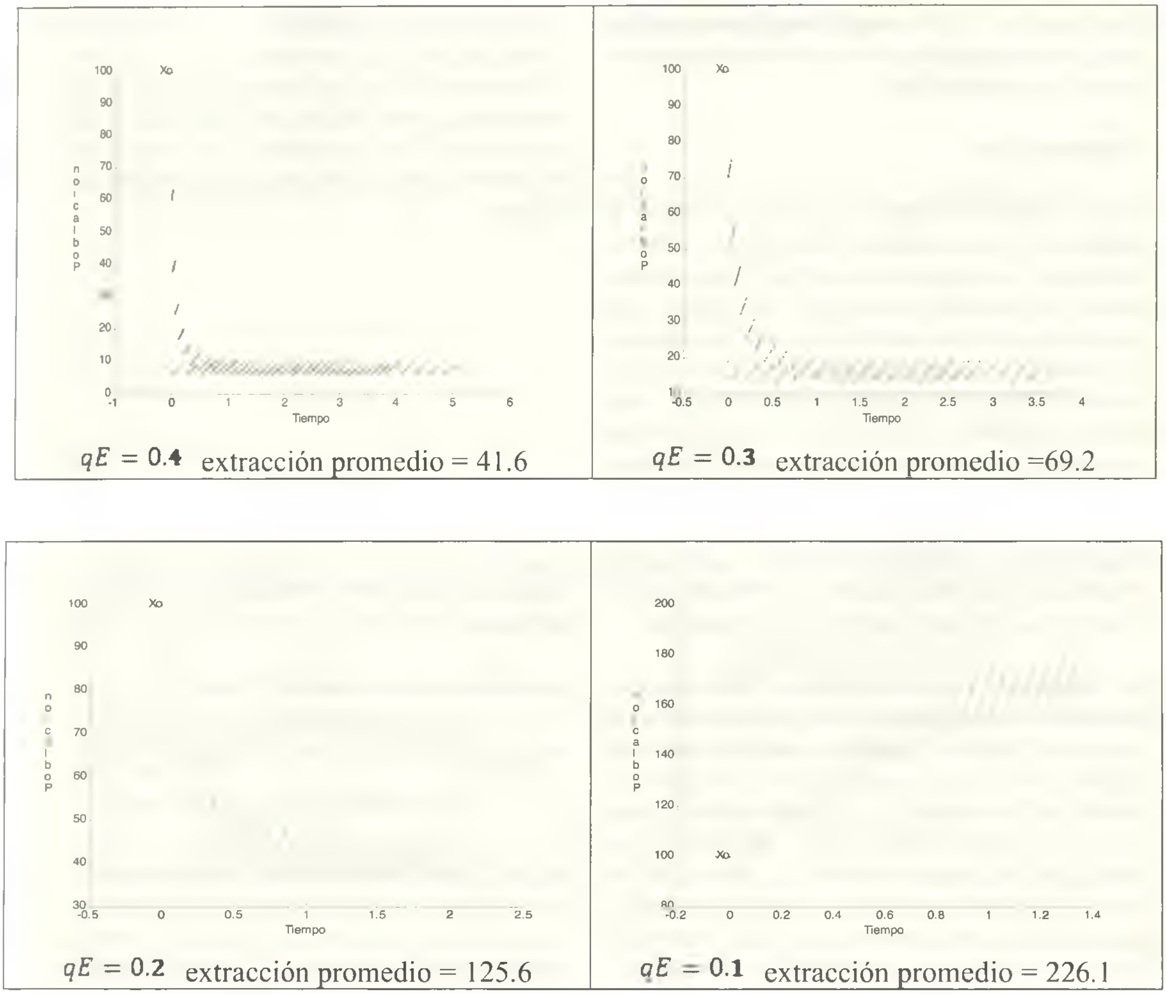


Figura 8: Comparación de la captura promedio cuando el nivel de qE disminuye de 0.4 a 0.1, en 20 periodos.

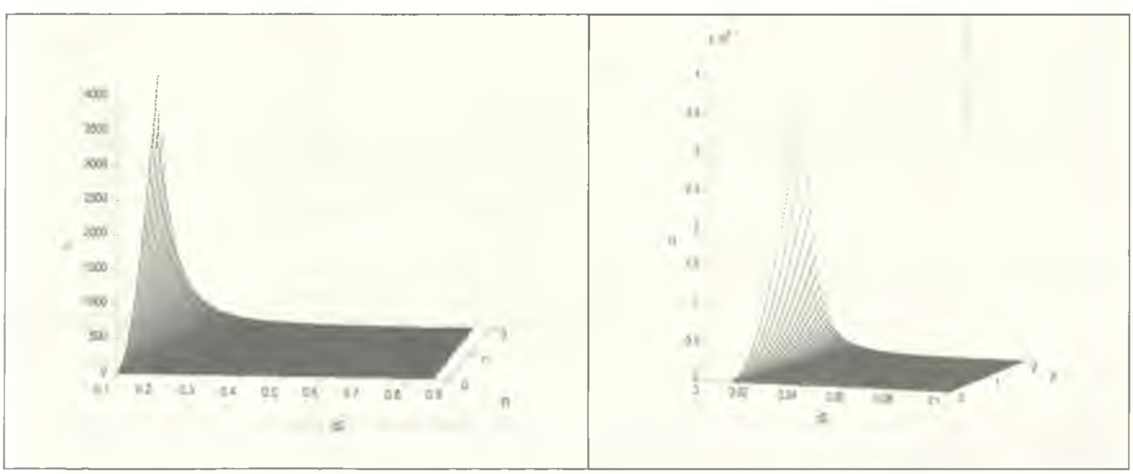


Figura 9: Solución numérica del Modelo Maltusiano

3. La Tesis

La Tesis asume como previos los resultados de la sección anterior. En las subsecciones que siguen se expone, con algún detalle, el trabajo biomatemático de los estudiantes memoristas.

3.1. Introducción

El Efecto Allee (en adelante EA) es un concepto de la Ecología de Poblaciones, que describe una relación positiva entre la densidad demográfica y la tasa de crecimiento per cápita de las especies. Esto significa que para poblaciones relativamente pequeñas, la reproducción y supervivencia de individuos son parámetros que disminuyen. Este efecto desaparece generalmente para poblaciones grandes. El EA puede aflorar por diversas causas en una población, por ejemplo: reducida defensa anti depredadora, termorregulación social, éxito en la búsqueda de pareja, entre otras. En estos casos se dice que hay un EA, cuando hay un tamaño o densidad de población en nivel crítico, donde la población que se encuentra bajo este nivel declina hasta extinguirse.

En el modelo de crecimiento natural Maltusiano, lo característico es que la tasa de crecimiento per-cápita es constante. Es por ello que para considerar un EA en el modelo y no alterar mayormente esta característica, se establecerá la existencia de un nivel mínimo o crítico de población, que se denota como x_m, de tal forma que para un nivel de población menor a x_m la tasa de crecimiento per cápita será R (una constante negativa) y para un nivel de población mayor a x_m será (constante positiva). Cuando el nivel de población es igual a x_m se considera la tasa nula o cero. Por lo tanto, la tasa de crecimiento per cápita, $R(x)$, será una función de que toma la forma presentada en la Figura (10).

$$R(x) = \begin{cases} -\gamma & \text{si} \quad x < x_m \\ 0 & \text{si} \quad x = x_m \\ R & \text{si} \quad x > x_m \end{cases} \qquad (12)$$

Figura 10: Representación de la tasa de crecimiento per cápita

De esta manera el modelo adopta la forma de una ecuación diferencial, de campo no continuo, que satisface:

$$x' = R(x)x \qquad (13)$$

Se debe notar la forma que adopta la tasa de crecimiento poblacional como función de la biomasa. La idea es mantener una facilidad técnica, por ejemplo, que ésta sea lineal a pedazos, tal como se puede apreciar en la Figura 11.

Figura 11: Tasa de crecimiento en función del tamaño poblacional

La solución de la ecuación (13) será,

$$x(t) = \begin{cases} x_o \exp[-r(t - t_0)] & \text{si} \quad x_0 < x_m \\ x_0 & \text{si} \quad x_0 = x_m \\ x_o \exp[R(t - t_0)] & \text{si} \quad x_0 > x_m \end{cases} \qquad (14)$$

En la Figura 12 se observa el comportamiento de la función $x(t)$ para tres valores representativos de la dinámica de evolución de la población, tomando en cuenta una población inicial x_0: mayor, igual o menor que la población mínima de sobrevivencia x_m.

Figura 12: Evolución del Modelo Maltusiano con Efecto Alle, dado el valor de la población inicial

3.2. El Modelo de Captura

La población a estudiar representa un recurso expuesto a cosecha. Al momento de explotar el recurso, debido a la presencia de EA, para que la población no se extinga necesitamos que después de una cosecha el nivel de biomasa se mantenga sobre el nivel mínimo de sobrevivencia x_m.

Mientras no actúe el EA, i.e., mientras el nivel de población esté sobre x_m, el comportamiento está dominado por la trayectoria periódica estable $\bar{x}$, como fue observado en la sección anterior. Dicho esto, se tienen tres escenarios posibles, que la trayectoria periódica sin EA esté: bajo, medio o sobre x_m, ver Figura 13.

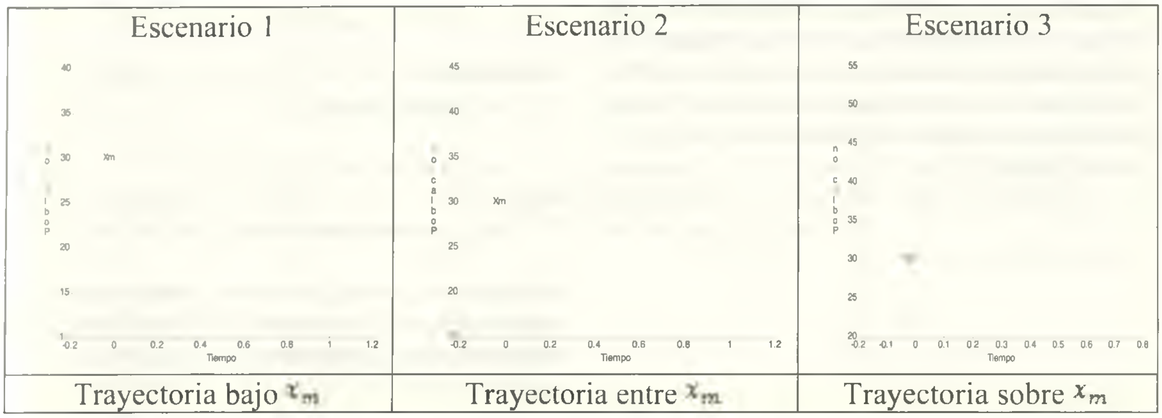


Figura 13:Escenarios posible de trayectorias periódicas.

Sin EA, para un rango de esfuerzos, toda trayectoria converge a la solución periódica. Luego, con EA, si una trayectoria está por arriba del nivel x_m, tenderá a la periódica, pero de caer bajo x_m en algún instante, esta población irá a la extinción. Por lo tanto, necesario es que la trayectoria periódica se mantenga sobre x_m. Ver Figura 14.

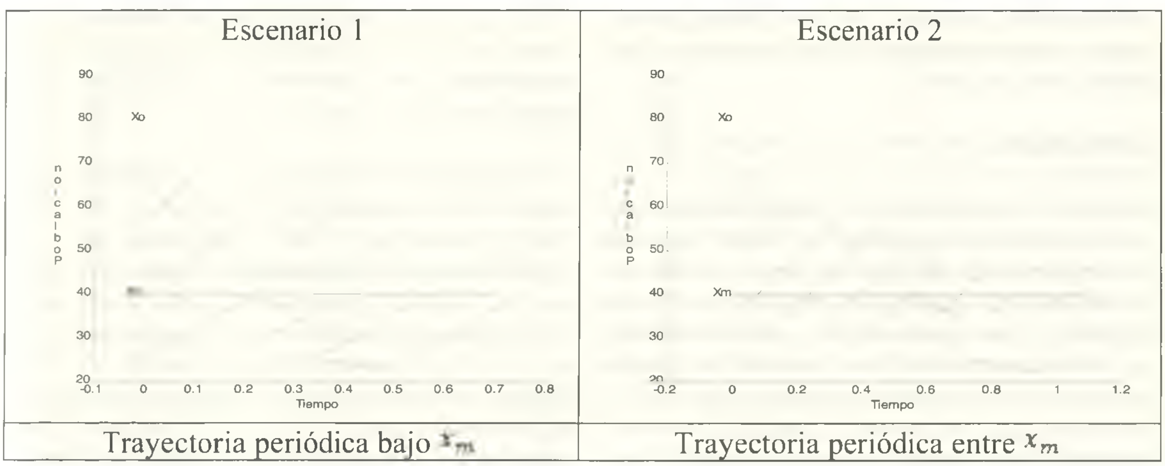


Figura 14: escenarios de extinción de la biomasa

Una forma de asegurar que la población no se extinga es procurar que la trayectoria periódica del modelo esté siempre sobre x_m (Escenario 3), lo que se puede lograr estableciendo que

$$\bar{x}\,(1\text{-}qE) = \text{-R}\alpha(1\text{-}qE) \,/\, [qE\ln(1\text{-}qE)] > x_m$$

Aislando de esta inecuación los términos qE que están fuera del logaritmo, tenemos,

$$\text{-R}\alpha \,/\, [x_m \ln(1 - qE) - \text{R}\alpha] > qE$$

Sea $s=qE$, si se llama al lado izquierdo de esta desigualdad $z(s)$ y al lado derecho $w(s)$, de modo que:

$$z(s)=\text{-}R\alpha/[x_m \ln(1\text{-}qE)\text{-R}\alpha] \text{ y } w(s) = s, \qquad (15)$$

con $s \in]0,1[$. Por lo que el problema, de probar la existencia de un rango de esfuerzo para esta condición, se reduce a la desigualdad $w(s) < z(s)$.

Se debe notar que

$$\lim_{s\to 1^-} z(s) = 0 \;\wedge\; \lim_{s\to 0^+} z(s) = 1 \;\wedge\; z'(s) = \frac{-R\alpha x_m}{[R\alpha - x_m \ln(1-s)]^2(1-s)}$$

Claramente $z'(s) < 0$, en otras palabras la función $z(s)$ es decreciente. Como $w(s)$, la identidad, es creciente para todo $s \in]0,1[$, se puede asegurar que las gráficas de $w(s)$ y $z(s)$ se intersectan en un único punto. Esto señala que existe un rango para s donde se cumple que $w(s) < z(s)$.

Se puede observar en (15) que $z(s)$ depende de x_m. Es más, si x_m toma valores cada vez más grandes, $z(s)$ sufre un desplazamiento en todo el intervalo [0,1] acercándose al origen, lo que también ocurre con los correspondientes puntos de intersección entre $w(s)$ y $z(s)$. Ver Figura 15.

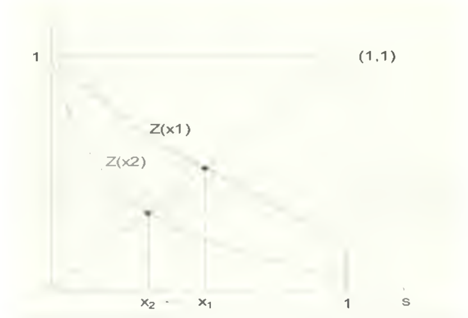


Figura 15: Variación en niveles qE de x_m cuando aumenta

En otras palabras, a mayor x_m menor es el rango donde es posible escoger el esfuerzo para lograr que la trayectoria periódica esté por sobre x_m.

3.3. Resultados

En la sección anterior se mostró que existirá una trayectoria periódica asintóticamente estable para cada nivel de qE siempre que $qE < 1 - \exp(-2)$. Ahora, con la presencia de EA, aún si la trayectoria periódica está por sobre x_m, ¿cómo poder asegurar, en la evolución de una población cualquiera, que el nivel de la biomasa después de una extracción se mantenga sobre el nivel mínimo, aún cuando su trayectoria tienda a la periódica? Para dar respuesta, debemos encontrar el modo de lograr que si la población inicial "x_0" es mayor que el nivel de periodicidad "$\bar{x}$", los futuros niveles de población, $x(t_k)$ también estén por sobre $\bar{x}$.

Recíprocamente, si x_0 es menor que $\bar{x}$, debemos asegurar que los futuros niveles de población $x(t_k)$ sean cada vez mayores.

Teorema: Sea $\bar{x} = -R\alpha/[qE\ln(1-qE)]$ y $qE < 1 - \exp(-1)$.

1. Si $x_0 = x(t_0) > \bar{x}$, entonces $x(t_k) \downarrow \bar{x}$, con $k=1,2,3,\ldots$
2. Si $x_0 = x(t_0) < \bar{x}$, entonces:
   a) Si $x(t_0) > R\alpha/qE$, $x(t_k) \to \bar{x}$ con $k=1,2,3,\ldots$
   b) Si $x(t_0) < R\alpha/qE$, entonces $x(t_1 > \bar{x}$ y por 1) $x(t_k) \downarrow \bar{x}$, con $k=1,2,3,\ldots$

Demostración: Sea $\bar{x} = -R\alpha/[qE\ln(1-qE)]$ y $x(t_1) = x_0(1 - qE)\exp[R\alpha/(qEx_0)]$.

1. Si $x_0 > \bar{x}$ entonces, $\bar{x} < x(t_1) < x_0$
2. Si $x_0 > \bar{x}$ entonces, $\bar{x} > x(t_1) > x_0$

Si se observa que si $x(t_1)$ es el nuevo punto inicial, para ambos casos $x(t_2)$ estará entre $\bar{x}$ y $x(t_1)$, y si se repite este proceso con los demás términos, se tendrá que $x(t_{k+1})$, estará entre $x(t_k)$ y $\bar{x}$.

1) Por demostrar $x(t_1) < x_0$: Por hipótesis sabemos que $\bar{x} < x_0$, lo que significa que:

$$-R\alpha/[qE\ln(1-qE)] < x_0 \tag{16}$$

Si se desarrolla (16), esta tiene la forma $-R\alpha/[qEx_0] > \ln(1-qE)$. Luego aplicando la función exponencial tenemos $1 > (1 - qE)\exp[R\alpha/(qEx_0)]$. Finalmente amplificando por x_0 se obtiene $x_0 > x_0(1-qE)\exp[R\alpha/(qEx_0)]$, esto es, $x_0 > x(t_1)$.

2) Por demostrar $\bar{x} < x(t_1)$: Sea $g(x) = x \cdot \exp[R\alpha/(qEx)]$, que es estrictamente creciente en $[R\alpha/qE, \infty[$, si $x_0 > \bar{x} > R\alpha/qE$, entonces $g(x_0) > g(\bar{x})$. Multiplicando por $1-qE$ a ambos lados de la desigualdad, se tiene que $(1-qE)g(x_0) > (1-qE)g(\bar{x})$. Luego como $x_0 > \bar{x}$, multiplicando las dos últimas desigualdades se tiene finalmente $\bar{x} < x(t_1)$, se debe notar que se cumple cuando, $\bar{x} = -R\alpha/[qE\ln(1-qE)] > R\alpha/(qE)$. Si se despeja en términos de qE, se observa que $qE < 1-\exp(-1)$. Por lo tanto, para asegurar que la trayectoria de evolución de la población no pase a ser menor que la trayectoria periódica, debemos tener $qE \in]0,1-\exp(-1)[$.

Se debe observar que sin EA (ver la Sección 2) sólo se necesitaba que $qE \in]0,1-\exp(-2)[$ para que el Modelo Maltusiano de Cosecha Impulsiva tuviese un comportamiento adecuado a lo esperado, esto es sustentabilidad; en cambio ahora, con la presencia de EA, el intervalo al que pertenece qE es menor. Ver ejemplo en la Figura 16.

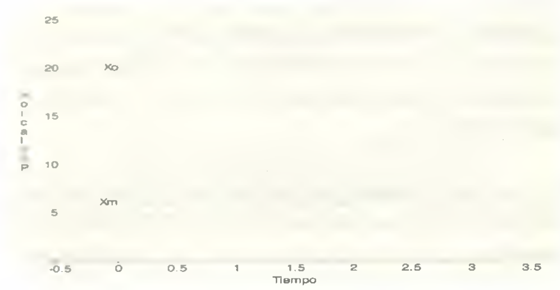


Figura 16: Evolución de la población cuando $\bar{x} < x(t_1) < x_0$ y $qE < 1 - \exp(-1)$.

a) Por demostrar $x(t_1) > x_0$: Si se realiza el mismo procedimiento que en 1.a, queda demostrado.

b) Por demostrar $\bar{x} > x(t_1)$: Si como 1.b., se define $g(x)=x\cdot\exp[R\alpha/qEx]$, estrictamente creciente en $[R\alpha/qE, \infty[$, también queda demostrada la desigualdad, pero el resultado es un poco diferente. En 1.b. cuando $\bar{x} < x(t_1)$ se debía cumplir $x_0 > \bar{x} > R\alpha/qE$, en cambio en 2.b. cuando $\bar{x} > x(t_1)$ se debe cumplir $\bar{x} > x_0 > R\alpha/qE$. Ver Figura 17.

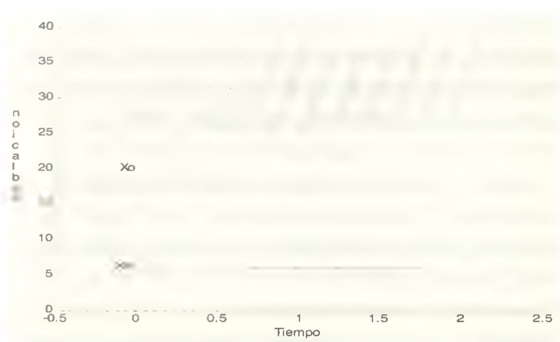


Figura 17: Evolución de la población cuando $\bar{x} > x(t_1) > x_0$ y $\bar{x} > x_0 > R\alpha/qE$.

Observación: Lo que interesa al plantear las conjeturas es encontrar alguna forma de lograr que la trayectoria de la biomasa, después de futuras extracciones, se mantenga siempre sobre el nivel mínimo x_m. Así, se asegura que la población sea sustentable en el tiempo.

Ahora bien, si en la demostración de 2.b, $\bar{x}$ y $x(t_0)$ fueran menores que $R\alpha/(qE)$ (donde la función $g(x)$es decreciente) se tendria que $g(x) < g(x(t_0))$. Luego, realizando un procedimiento similar, se logra el siguiente resultado: $\bar{x} < x(t_1)$, que es el mismo caso dado en 1.b, donde se demuestra que se cumple sólo cuando $qE < 1 - \exp(-1)$, de esta manera, el resultado de la primera y segunda parte de la conjetura es el mismo. Un ejemplo se puede apreciar en la Figura 18. De esta forma el teorema queda demostrado.

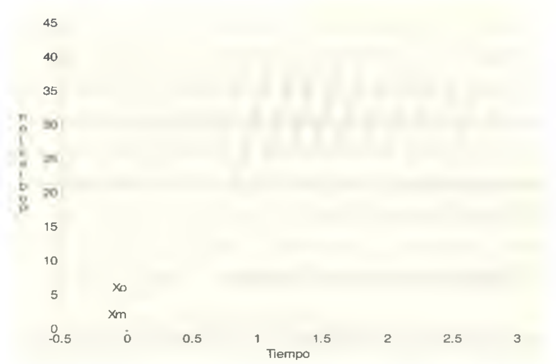
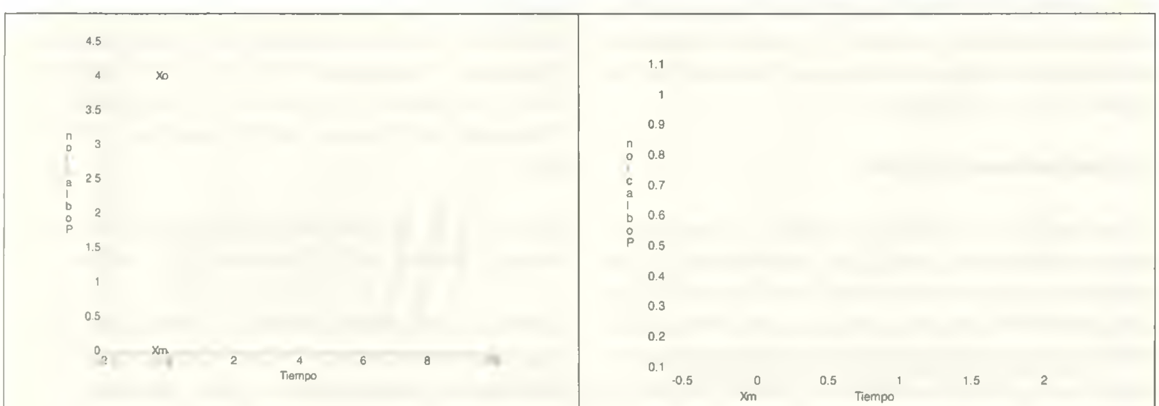


Figura 18: Evolución de la población cuando $\bar{x} > x(t_1) > x_0$ y $R\alpha/qE > x_0$.

Ahora, una pregunta es ¿Qué pasa cuando $qE \in]1-\exp(-1),1-\exp(-2)[$, si se sabe que la trayectoria periódica es estable? Bueno, es posible encontrar niveles de población que están entre $\bar{x}(1-qE)$ y $x(t_k)(1-qE)$. Por lo tanto, si x_m se encuentra en este intervalo, entonces la biomasa irá a la extinción. La Figura 19 es un ejemplo con qE=0,85, a la derecha hay una vista aumentada donde apreciamos un nivel de población por debajo de la periódica.



Normal	Con zoom

Figura 19: Evolución de biomasa con $qE \in]1-\exp(-1),1-\exp(-2)[$

3.4. Condiciones para la Sustentabilidad

A modo de conclusión, para asegurar que el Modelo Maltusiano con Cosecha Impulsiva con EA sea sustentable, o dicho de otra forma, que los niveles de biomasa estén siempre por sobre x_m, debemos preocuparnos solamente de dos casos:

a) $x_0 > \tilde{x}$

En este caso, teniendo un $qE < 1-\exp(-1) \approx 0{,}632$ se debe procurar que la trayectoria periódica esté siempre por sobre x_m. Según lo visto en la Sección 3.2 siempre existen niveles de qE que aseguran una trayectoria periódica mayor a x_m (Ver Figura 15), por lo que sólo se debe cumplir: $\tilde{x}(1-qE) > x_m$, haciendo el reemplazo del valor de $\tilde{x}$ queda $-R\alpha/[qE(1-qE)\ln(1-qE)]>x_m$.

b) $x_0 < \tilde{x}$

Al igual que en el caso anterior, se debe tener un $qE < 1-\exp(-1)$, pero ahora sólo se debe asegurar que en la primera cosecha el nivel de biomasa esté por sobre x_m. Es decir, $x(t_0)(1-qE) > x_m$.

3.5. Optimización en el Modelo

La optimización es un asunto muy importante para cualquier economista o persona vinculada a la explotación de recursos renovables, pues siempre se piensa en la utilidad que se recibe por explotar dicho recurso.

Como se ha visto en esta sección, la población en estudio es aquella donde $x_0 > \tilde{x}$, pues de otra forma no tendría sentido hacerlo. De esta manera el tamaño poblacional está dado por $x(t) = x_0 \exp[(R(t-t_0)]$, que es la misma solución que presenta el modelo Maltusiano sin EA. Esto es porque mientras el nivel de biomasa está por sobre x_m, el EA no actúa en la población.

Por lo escrito, el resultado al optimizar el nivel de captura en este modelo, es tal que "la captura sustentable por unidad de tiempo se hace mayor a medida que los niveles de qE se acercan a cero".

3.6. Conclusiones de la Tesis

En esta tesis se presenta un modelo maltusiano de extracción impulsiva con EA en la población, lo que quiere decir, que necesita un nivel mínimo de población para que ésta subsista en el tiempo. La inclusión de EA permitió dar un sentido más real al modelo maltusiano de extracción impulsiva. Además se planteó la ecuación diferencial del modelo y se resolvió.

En el análisis del modelo, plantea y logra identificar, desarrollar y solucionar todos los casos donde el EA afectaba la evolución de la población. Es así como se determina que el nivel de biomasa lograba sustentabilidad (sin causalidad de EA), cuando los niveles de qE < 0,632.

Este último resultado permite reflexionar que bajo estos supuestos quienes pueden resultar favorecidos serían aquellos sectores comerciales que aplican un bajo esfuerzo al momento de intervenir en algún recurso renovable. Al regulador le interesa manejar estos sectores, preguntándose ¿quiénes son? Un ejemplo en concreto, es el caso de los artesanos, personas que solo explotan un recurso para el sustento diario o para pequeños empresarios. En el caso de las pesquerías, los artesanos solo poseen uno o dos botes y algunas redes, que claramente es un esfuerzo bajo comparado con las grandes industrias pesqueras que utilizan grandes barcos, maquinarias y varios trabajadores cada vez que realizan faenas.

4. Bibliografía

Allee, W.C., Animal Aggregations: A Study in General Society. University of Chicago Press, Chicago, 1931.

Clark, C.W., Mathematical Bioeconomics: Optimal Management of Renewable Resources, Wiley-Interscience a John Wiley and Sons, 1990.

Córdova-Lepe, F., Bioeconomía Matemática, una experiencia inter-tri-disciplinaria para el profesor de matemática. Revista Chilena de Educación Científica, 4, [2], p. 54-65, 2005.

Córdova-Lepe, F., Sistemas Impulsivos y Modelos Bioeconómicos, Cursillo, XX Jornadas de Matemática de la Zona Sur, Osorno-Chile. 2006

Córdova-Lepe, F., Advances in a theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times with applications to bio-economics, In Chapter: Population Dynamics, Mondaini, R. & Dilao, R., BIOMAT-2006. International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific, p. 343-358, 2007

Malthus, T.R., An Essay on the Principles of Population, Second Edition [1803], Everyman edn., no date.

Schaefer, M., Some aspects of the dynamics of populations important to the Management of the commercial marine fisheries, Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., 1, [2], p. 27-56, 1956.