ELEMENTOS DEL CENTRO ASOCIATIVO DE ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS SIMPLES

Nelson Aravena Castillo*

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar la caracterización de un tipo especial de estructura algebraíca no asociativa, como las álgebras alternativas simples, con la condición adicional de la conmutatividad, con el uso de una categoría particular de subconjuntos de ella como lo son el centro asociativo, el centro conmutativo y el centro.

Palabras claves: Algebra alternativa simple, asociador, centro asociativo, centro conmutativo, elemento nilpotente.

Abstract

The purpose of this work is to show a characterization of certain type of non asociative algebraic structure, like simple alternative algebras with the additional condition of the commutative property, using a particular type of subsets of them, as the associative center, the commutative center and the center.

Keywords: Simple alternative algebra, associator, associative center, conmutative center, nilpotent element.

* Departamento de Matemáticas, Universidad Metropolitana de Ciencias de la educación UMCE / Chile nelson.aravena@umce.cl/Trabajo subvencionado por el Proyecto DIUMCE FIBAS 07/07

Recibido 31 marzo 2008; **aceptado** 30 mayo 2008

Introducción

Este trabajo se enmarca en el estudio de las álgebras no asociativas, recoge las ideas vertidas inicialmente por Arthur Cayley (1821-1895) en la creación y desarrollo del álgebra de los octoniones. Dicho trabajo abre una brecha en la fortaleza de las leyes formales que hasta entonces, se habían respetado en todas las generalizaciones de números. *Un álgebra alternativa sobre un cuerpo K, es un álgebra A sobre K que verifica una propiedad de asociatividad débil, expresada en la satisfacción de dos identidades para todo sus elementos, ellas son:* $a^2 b = a(ab)$ *y* $ab^2 = (ab)b$ *para todo* $a, b \in A$. *Ejemplo de álgebra alternativa y no asociativa: los octoniones de Cayley ó álgebra de Cayley-Dickson (ver Schafer et al [3, pag. 5])* . Se sabe en 1951 (Bruck y Kleinfeld) que la única álgebra de división alternativa y no asociativa sobre el cuerpo de los números reales R es la de los octoniones de Cayley, y en 1958 Dott y Milnor determinan que las únicas álgebras de división de dimensión finita sobre R son las de dimensión 1, 2, 4 y 8. Aquellas que son asociativas, son isomorfas a R, C y H (cuaternios de Hamilton). Por otra parte, aquellas que son alternativas y no asociativas, son isomorfas al álgebra O de los octoniones de Cayley (Bouvier, A. y George, M. [1], 1984). La naturaleza de las álgebras alternativas simples se conoce por los trabajos publicados en el siglo XX por los matemáticos Max Zorn en la década del treinta, Richard D. Schafer, en la década del cuarenta. En la siguiente década están los aportes de Adrian Albert, L. A. Skornyakov, R.H. Bruck y Erwin Kleinfeld. Los teoremas de estructura de las álgebras alternativas se presentan en la publicaciones de Kleinfeld en 1958, M. Slater entre 1969 y 1971, K.A. Shevlakov en 1972 e Iván Shestakov en 1976.

1. Conceptos Básicos

Definición 1. Un *álgebra* es un espacio vectorial A, sobre un cuerpo F, dotado de una multiplicación bilineal $A \times A \to A$ de $(x,y) \to x\,y$, que es distributiva a la izquierda y a la derecha, es decir:

$x(ay + by) = a(xy) + b(xz)$ (distributividad a izquierda)

$(ax + by)z = (ax)z + (by)z$ (distributividad a derecha)

para todo $a,b \in F$ y para todo $x, y, z \in A$.

Definición 2. Sea A un álgebra. *El asociador en A* es la función trilineal

$(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$, para todo $x, y, z \in A$.

Definición 3. *Un álgebra es asociativa* si $(x, y, z) = 0$; para todo $x, y, z \in A$. *Un álgebra es no asociativa* si la identidad anterior no necesariamente se satisface.

Definición 4. Un *álgebra A es alternativa* si satisface las identidades alternativas a la izquierda y a la derecha, es decir

$$(x, x, y) = 0 \text{ y } (y, x, x) = 0 \text{ , para todo } x, y \in A.$$

Definición 5. Un álgebra A *es flexible* si satisface la identidad $(x, y, x) = 0$, para todo $x, y \in A$.

Observación 1.

1) Si un álgebra A es alternativa entonces es un álgebra flexible.

2) Si se cumplen dos de las identidades dadas en las definiciones 4 y 5 entonces se cumple la tercera.

3) Ejemplo de álgebra alternativa simple no asociativa es el álgebra de Cayley-Dickson.

Nota: Uno de los principales problemas en teoría de álgebras alternativas es la caracterización de ellas, es decir, el conocimiento de las propiedades de su estructura.

Definición 6. Un álgebra A es anticonmutativa si satisface la identidad $x^2 = 0$ para todo $x \in A$.

Definición 7. El *conmutador* en un álgebra A es la función bilineal [,] definida por:

$$[x,y] = x\,y - yx, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Un álgebra A es conmutativa si satisface la identidad $[x,y] = 0$, para todo $x,y \in A$.

Definición 8. Sea A un álgebra. Dados dos subconjuntos B y C de A, B*C es el subespacio vectorial generado por los productos* yz donde $y \in B$, $z \in C$.

Definición 9. Una *subálgebra de un álgebra A* es un subespacio B de A que satisface la condición

$BB \subseteq B$.

La subálgebra generada por un subconjunto S de un álgebra A es la más pequeña subálgebra de A que contiene a S.

Definición 10. Un *ideal bilátero de un álgebra A* (o simplemente ideal), es una subálgebra B que satisface la condición:

$$AB + BA \subseteq B.$$

Definición 11. *Un álgebra A* es simple si $AA \neq \{o\}$ y A no tiene ideales excepto los triviales $\{o\}$ y A.

Definición 12. Definamos en un álgebra A cualquiera, los tres siguientes subconjuntos:

El centro asociativo $N(A)$ de A se define por:

$N(A) = \{n \in A \mid (n,A,A) = (A,n,A) = (A,A,n) = \{o\}\}$.

El centro conmutativo K(A) de A, definido por:

$K(A) = \{k \in A \mid [k, A] = \{o\}\}$.

El centro Z(A) de A, se define por:

$Z(A) = N(A) \cap K(A)$.

2. Resultados Preliminares

Lema 1. Sea A un álgebra cualquiera, x, y, $z \in A$ y $n \in N(A)$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

1) $n(x,y,z) = (nx,y,z)$.

2) $(xn,y,z) = (x,ny,z)$.

3) $(x,y,z)n = (x,y,zn)$.

Además, si uno de los elementos $x,y,z \in (A)$, entonces se cumple la siguiente igualdad en A:

4) $[xy,z] = x\,[y,z] + [x,z]\,y$

Demostración. Demostremos preliminariamente la identidad de Teichmüller

5) $(wx,y,z) + (w,x,yz) = w\,(x,y,z) + (w,x,y)z + (w,xy,z)$, para todo $x,y,z,w \in A$.

Desarrollando tenemos:

$$((w,x)\,y\,)\,z - (wx)(yz) + (wx)(yz) - w(x(yz)= w$$
$$((xy)\,z - x(x(yz)) + ((wx))\,y - w\,(xy)))z$$
$$+ (w(xy))z - w((xy)z)$$

$$((wx)y)y - w(x(yz)) = (xy)z) - w(x(yz))+((wx)y)z -$$
$$(w(xy)) + (w(xy))z - w((xy))z.$$

Cancelando tenemos que se cumple dicha identidad

Si en la relación (5) tomamos $w = n \in N\,(A)$ entonces: $(n, A, A)= (A, n,A) = (A,A, n) = \{0\}$

$$(nx,y,z) + (n,x,yz) = n\,(x,y,z) + (n, x, y) + (n,xy,z)$$
$$(n\,x, y, z) + 0 = n\,(x, y,z) + 0+ 0$$

$$n(x,y,z) = (n\,x, y,z).$$

Si en (5) tomamos $x = n \in N\,(A)$, entonces:

$$(wn, y,z) + (w,n,yz) = w(n,y,z)+(w,n,y)z+(w,ny,z)$$
$$(wn, y,z) + 0 = w.0 + 0z +(w,ny,z),$$
$$(wn, y, z = (w, ny, z).$$

Si en (5) tomamos $z = n \in N\,(A)$, entonces:

$$(wx,y,n) + (w,x,yn) = w\,(x,y,n) + (\,w,x,y)n+(w,xy,n)$$
$$0 + (w,x,yn) = 0 + (w,x,y)n + 0,\ (w,x,y)n =(w,x,yn).$$

Veamos que en cualquier álgebra es válida la siguiente identidad:

6) $[xy,z] - x\,[y,z]\,) - [x,y]\,y = (x,y,z) - (x,z,y) + (z,x,y)$, para todo $x,y,z \in A$.

Desarrollando tenemos:

$$[xy,z] - x[yz] - [x,z]y = (xy)z - x(yz) - (xz)y +$$
$$x(zy)+(zx)y - z(xy)$$
$$= ((xy)z - x(yz)) - ((xz)\,y - x(zy)) + ((zx)y - z(xy))$$
$$= (x,y,z) - (x,z,y) + (z,x,y).$$

Luego si a lo menos uno de los elementos x,y,z ($\in$ N A) tenemos que:

$$(x,y,z) = (x,z,y) = (z,x,y) = 0 \text{ luego de (6) tenemos}$$
$$[xy,z] - x\,[y,z] - [x,z]y = 0$$
$$[xy,z] = x\,[y,z] + [x,z]\,y.$$

Corolario 1. *Sea A álgebra cualquiera, el centro asociativo o núcleo N(A) y el centro Z(A) son subálgebras de A . Si el álgebra es alternativa, entonces el centro conmutativo K(A) es también una subálgebra de A, y además $3K(A) \subseteq N(A)$.*

Demostración. Veamos que *N(A)* es subálgebra de A:

$0 \in N(A)$ pués $(0,x,y) = (x,0,y) = (x,y,0) = 0$; para todo $x, y \in A$.

Sea n, m, $\in$ N(A) entonces $(m,x,y) = (x,m,y)=(x,y,n) = 0$

$$(m,x,y) = (x,m,y) = (x,y,m) = 0$$
$$(n+m,x,y) = ((n+m)x)\,y - (n+m)\,(xy)$$
$$= (nx)y + (mx)y - n(xy) - m(xy)$$
$$=((nx)y - n\,(xy)) + ((mx)\,y - (m(xy))$$
$$= (n,x,y) + (m,x,y) = 0 + 0 = 0$$

análogamente se demuestran los otros casos por lo tanto $n + m \in N(A)$.

sea $\alpha \in F$, $n \in N(A)$ entonces $\alpha n \in N(A)$.

$$(\alpha n,x,y) = ((x)x)y - (\alpha n)(xy) = \alpha((nx)y) - \alpha n(xy))$$
$$= \alpha((nx)y - n(xy)) = \alpha(n,x,y) = 0.$$

Análogamente se demuestra los otros casos, por lo tanto $n \in N(A)$.

$n,m \in N(A)$ entonces $nm \in N(A)$.

$$(nm,x,y) = n(m,x,y) = n.\ 0 = 0$$
$$(x,nm,y) = (xn,m,y) = 0$$
$$(x,y,nm) = (x,y,n)\ m = 0.m = 0.$$

Luego $nm \in N(A)$.

Luego N (A) es una subálgebra de A.

$Z(A) = N(A) \cap K(A)$ es subálgebra de A.

- $0 \in Z(A)$ pues $0 \in N(A)$ y $0 \in K(A)$.
- Sean $n, m \in Z(A)$ entonces $n, m \in N(A) \wedge n, m \in K(A)$

$$(n,A,A) = (A,n,A) = (A,A,n) = 0 \ \wedge\ [n,A] = 0$$
$$(m,A,A) = (A,m,A) = (A,A,n) = 0 \ \wedge\ [m,A] = 0$$

Se demostró anteriormente que: $\alpha n + \beta m \in N(A)$; $\alpha,\beta \in F$

Veamos que si, $\alpha, \beta \in F$ y $n, m \in K(A)$ entonces $\alpha n + \beta m \in K(A)$

$$\begin{aligned}[\alpha n + \beta m,x] &= (n + \beta m)\ x - x\ (n + \beta\ m)\\ &= (\alpha n)\ x + (\beta m)\ x - x\ (\alpha n) - x\ (\beta m)\\ &= (\alpha n)x - x\ (\alpha n) + (\beta m)\ x - x\ (\beta m)\\ &= \alpha\ (nx) - \alpha\ (xn) + \beta\ (mx) - \beta\ (x\ m)\\ &= (nx - xn) + \beta\ (m\ x - x\ m)\\ &= \alpha\ [n,x] + \beta\ [m,x] = \alpha\ 0 + \beta \cdot 0 = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Luego $\alpha n + \beta m \in K(A)$ por lo tanto $\alpha n + \beta\ m \in Z(A)$.

Demostremos que:

- Sea $n,m \in Z(A)$ entonces $nm \in Z(A)$

si $n,m \in N(A)$ entonces $n{\cdot}m \in N(A)$ (demostrado anteriormente).

si $n,m \in K(A)$ entonces $n{\cdot}m \in K(A)$ (P.D.).

usando la relación (6) tenemos que:

$[nm,x] - n\ [\ m,x\ ] - [n,x]m = (n,m,x) - (n,x,m) + (x,n,m))[n\ m,x] = 0$ entonces $nm \in K(A) \cap N(A)$

luego $nm \in Z(A)$

luego Z (A) es una subálgebra de A.

Veamos ahora que: $3K(A) \subseteq N(A)$

Si A es un álgebra alternativa es decir si $(x,x,y) = 0$ y $(y,x,x) = 0$; para todo $x, y \in A$ Entonces la identidad

$[xy,z] - x[y,z] - [x,z]\ y = (x,y,z) - (z,x,y) + (z,x,y)$ se reduce a la forma

7) $[xy,z] - x[y,z] - [x,z]y = 3\ (x,y,z)$

álgebra alternativa implica álgebra flexible $(x,x,y) = 0$ si y solo si $(x, y,x) = 0$

linealizando esta expresión tenemos:

i) $(z,x,y) = -(x,z,y)$ · ii)$(z,x,y) = -(z,y,x)$ · iii)$(z,y,x) = -(x,y,z)$

luego sustituyendo en la identidad 6 tenemos:

$$\begin{aligned}[xy,z] - x\ [y,z] - [x,\ z]y &= (x,y,z) - (x,z,y) + (z,x,y)\\ &= (x,y,z) + (z,x,y) + (z,x,y)\\ &= (x,y,z) + 2(z,x,y)\\ &= (x,y,z) + 2\ (-(z,y,x))\\ &= (x,y,z) + 2\ (-(-(x,z,y))\\ &= (x,y,z) + 2\ (x,y,z)\\ &= 3\ (x,y,z).\end{aligned}$$

- Sea $3\ k \in 3\ K(A)$, $k \in K(A)$ entonces $[k,x] = 0$

$$(3\ k,x,y) = 3\ (k,x,y) = 3\ (x,k,y) = 3\ (x,y,k) = [xy,\ k] - x\ [y,k] - [x,k]y = 0 - x\ 0 - 0y = 0$$

luego $(3k,x,y) = 0$; para todo $x, y \in A$

luego $3k \in N(A)$

$3K(A) \subseteq N(A)$.

veamos que si A es un álgebra alternativa, K(A) es una subálgebra de A.

- $0 \in K(A)$ pues $[0,A] = 0$

si $\in$, $\beta \in F$ y $k, k' \in K(A)$

veamos que si A es un álgebra alternativa K(A) es una subálgebra de A.

$0 \in K(A)$ pués $[0,A] = 0$

si $\alpha,\beta \in F$ y $k,k' \in K(A)$ entonces $\alpha\,k + \beta\,k' \in K(A)$ si $k, k' \in K(A)$ y $x \in A$ tenemos por identidad 7) y dado que A es alternativa.

$3\ (k,k',\ x) = [kk',x] - k\ [k',\ x] - [k,x]\ k'$

como $3\,(k, k', x) = (3\,k, k', x) = 0$ (pues $3\,k \in N(A)$)

luego $[kk', x] = 0$ entonces $k, k' \in K(A)$

luego $K(A)$ es una subálgebra de A.

Corolario 2. Sea A un Φ - álgebra alternativa conmutativa. Si $1/3 \in \Phi$ entonces A es asociativa

Demostración. como A es conmutativa entonces $K(A) = A$

$Z(A) = K(A) \cap N(A) = A \cap N(A)$

luego $A = K(A) \subseteq Z(A)$

Teorema 1. Si A es un álgebra simple, entonces $Z(A) = \{o\}$ $\underline{v}$ $Z(A)$ es un cuerpo.

Demostración. Sea $Z = Z(A) \neq \{o\}$. Como $Z = K(A) \cap N(A)$

Z es asociativo y conmutativo. Nos basta probar entonces que Z contiene (o existe) un elemento neutro y que todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo en Z.

Sea $z \in A$; $z \neq 0$ zA es un ideal del álgebra A *pues*:
$0 \in zA$, $0 = z \cdot 0$, $0 \in A$

- $za_1, za_2 \in zA \Rightarrow za_1 - za_2 = z(a_1 - a_2) \in zA$; $a_1 - a_2 \in A$
- $b \in A, za \in zA \Rightarrow b(za) = b(az) = (ba)z \in zA$ pues $ba \in A$
  $(za)b = z(ab) \in zA$ pues $ab \in A$

además $zA \neq \{o\}$ pues $z^2 = zz \in zA$. Como A es un álgebra simple implica $zA = A$ como $z \in A$ entonces $x = zy$, cierto $y \in A$

$$zA \neq \{0\} \text{ pués } z^2 = zz \in zA$$

Como A es un álgebra simple se tiene que $zA = A$. Dado que $z \in A$ entonces existe $e \in A$. Tal que

$ze = z$ y $ez = z$

Sea $x \in A$ entonces $x = zy$ cierto $y \in A$

$$ex = e(zy) = (ez)y = zy = x,\ xe = (zy)e = y\,z)\,e = y\,(z\,e) = y\,z = x.$$

$ex = xe = x$, $x \in A$ luego e es el elemento neutro de A.

Como e A entonces $e \in zA$ luego existe $z' \in A$ tal que $zz' = e$.

luego existe elemento neutro idéntico para el álgebra A y es "e".

Como $e \in A$ entonces $e \in zA$ implica existe $z' \in A$ tal que $zz' = e$

Sean x, y 2 A elementos cualquiera y tal que $x = zt$. Luego tenemos que

$(z', x, y) = (z', zt, y) = (z'z, t, y) = (e, t, y) = 0$
(pues $e \in Z$)

además $(x, z', y) = (x, y, z') = 0$ luego $z' \in N(A)$.

como $[z', x] = [z', zt] = [zz', t] = [e, t] = 0$ luego $z' \in K(A)$

por lo tanto $z' \in N(A) \cap K(A) = Z$ luego $z' \in Z$

por lo tanto Z es un cuerpo.

Definición 13. Un álgebra A sobre un cuerpo F se llama *central sobre F si* $Z(A) = F$.

Teorema 2. Sea A un álgebra central simple sobre un cuerpo F, y si K es una extensión cualquiera del cuerpo F. Entonces el álgebra $A_K = K \otimes_F A$ es un álgebra central simple sobre el cuerpo K.

Demostración.

Veamos que A_K es un álgebra simple.

Sea $U \neq \{o\}$ un ideal de A_K.

Sea $u \in U$, $u \neq 0$ luego $u = \sum_i k_i \otimes a_i$; $k_i \in K$, $a_i \in A$ y los k_i son l.i en F. Se llamará *longitud* (o largo o extensión) del elemento u el número de a_i distintos de cero que existen en dicha expresión.

Elegimos $u \in U$, $u \neq 0$ de longitud mínima. Además identifiquemos el álgebra A con la F-subálgebra $1 \otimes A$ de la álgebra A_K, y consideremos el álgebra multiplicativa $M(A_K)$ del álgebra A_K la F – subálgebra $A^* = M^A{}_K(A)$ que es generada por el operador multiplicativo por elementos de A. Si $W \in A^*$, entonces $uW = \sum_i k \otimes a_i W \in U$. Dado que A es simple existe $W_o \in A^*$ tal que $a_1 W_o = 1$.

Por lo tanto es posible pasar del elemento u a un elemento $u_1 \in U$ con la misma longitud y que tenga la forma

$$u_1 k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes a'_2 + \ldots + k_m \otimes a'_m.$$

Para cualquier $a \in A$ el elemento $[1 \otimes a, u_1] = k_2 \otimes [a, a'_2] + \ldots + k_m \otimes [a, a'_m]$

pertenece a U. Sin embargo, la longitud de este elemento es menor que la longitud de *u*, por lo tanto debe ser necesariamente igual a cero (0).

Puesto que las k_i son l.i. sobre F, entonces por propiedades del producto tensorial tenemos que

$[a, a_i'] = 0$ para todo $i = 2,3, \ldots, m$, para todo $a \in A$.

En consecuencia $a_i' \in K(A)$. Análogamente obtenemos, que $a_i' \in N(A)$, y finalmente

$a_i' \in Z(A) = F$.

Si $a_i' = \alpha_i \in F$. Entonces

$$u_1 = k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes \alpha_2 + \ldots + k_m \otimes \alpha_m$$

$= (k_1 + \alpha_2 k_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_m k_m) \otimes 1 = k \otimes 1$ donde $k \in K$ y $k \neq 0$ dado que las k_i son linealmente independientes sobre F. En consecuencia tenemos que $U = A_K$, con lo cual se prueba la simplicidad del álgebra A_K.

Consideremos el elemento $z = \sum_i k_i \otimes a_i$ perteneciente al centro del álgebra A_K. Acá supongamos de nuevo que los elementos $k_i \in K$ son linealmente independientes sobre F. Entonces para cualquier $a,b \in A$ tenemos que:

$$0 = [z, 1 \otimes a] = \textstyle\sum_i k_i \otimes [a_i, a]$$
$$0 = (z, 1 \otimes a, 1 \otimes b) = \textstyle\sum_i k_i \otimes (a_i, a, b),$$

por consiguiente $[a_i, a] = (a_i, a, b) = 0$, análogamente tenemos que $(a, a_i, b) = (a, b, a_i) = 0$,

es decir los elementos a_i están en $Z(A) = F$. Sea $a_i = \alpha_i \in F$. Entonces $z = \sum_i k_i \otimes a_i = (\sum_i \alpha_i k_i) \otimes 1 \in K$.

Por lo tanto $Z(A_K) \subseteq K$. Además claramente $K \subseteq Z(A_k)$, con lo cual finalmente tenemos que $Z(A_K) = K$.

Proposición 1. (Shevlakov)
No existen álgebras localmente nilpotentes simples.

Demostración. Sea A un álgebra localmente nilpotente.
Supongamos que A es simple, sea $a \in A$, $a \neq o$ elemento cualquiera. Consideremos el ideal I_a generado por $A a + a A$ en el álgebra A.

$$I_a \neq \{o\} \text{ pues } a^2 = a.a + a.0 \in Aa + aA \in I_a$$
Luego $I_a = A$ dado que A es simple.

Por medio de esto, podemos encontrar elementos $x_{ij} \in A$ tal que

$$1)\ a = \sum_{i=1}^{t} a\, M_{xi1} M_{xi2} \ldots\ldots, M_{xiri,}$$

donde cada uno de los M_{xij} es igual a R_{xij} o es igual a L_{xij}.

Consideremos la subálgebra B de A finitamente generada por el conjunto $\{a, x_{11}, \ldots, x_{1kt}, x_{21}, \ldots, x_{tkt}\}$ finito.

Como B es un álgebra nilpotente. Es decir $B^N = \{o\}$, entonces si en cada término de la mano derecha de la igualdad 1) sustituimos por a y este procedimiento se repita N-1 veces, obtenemos como resultado que $a = 0$. Estableciéndose una contradicción con lo supuesto inicialmente. Por lo tanto no existe ninguna álgebra localmente nilpotente simple.

Emplearemos en lo sucesivo A como una álgebra alternativa arbitraria y $N = N(A)$, $Z = Z(A)$ Definimos en A la *función de Kleinfeld de la siguiente manera:*

$$f(w,x,y,z) = (wx, y,z) - x\,(w,y,z) - (x,y,z)w.$$

Lema 2. La función de Kleinfeld $f(w,x,y,z)$ es una función asimétrica de sus argumentos.

Demostración. Es suficiente probar que para cualquier par de elementos de argumentos iguales $f(w,x,y,z)= 0$. Pero por alternatividad a derecha $f(w,x,y,y) = 0$.

Si tomamos

$$g(w,x,y,z) = (wx,y,z)+(w,x,yz) - w(x,y,z)$$
$$-(w,x,y)z - (w,xy,z).$$

Observemos que el segundo miembro de la relación anterior surge de la identidad de Teichmüller.

Por lo tanto:

$$- f(z,w,x,y) = g(w,x,y,z) - f(z,w,x,y)$$
$$= (w\,x, y,z) + (w,x,yz) - w(x,y,z) - (w,x,y)z - (zw, x,y)$$
$$- (w, x, y) + w(z,x,y) + (w,x,y)z$$

linealizando las expresiones porque A es álgebra alternativa

$$\text{i) } (x,y,y) = 0 \quad \text{ii)} (x,x,y) = 0 \quad \text{iii) } (x,y,x) = 0$$
$$(x,y,z) = -(x,z,y)\,;\ (x,z,y) = -(z,x\ y)\,;$$
$$(x,y,z) = -(z,y,x)$$

aplicando estos resultados tenemos: $(x,y,z) = -(x,z,y) = (z,x,y)$

$= (wx,y,z) + (w,x,yz) - w\,(x,y,z) - (w,xy,z) - (zw,x,y) + w(x,y,z)$
$= (wx,y,z) + (yz,w,x) - (xy,z,w) - (zw,x,y)$

luego

$-f(z,w,x,y) = (wx,y,z) + (yz,w,x) - (xy,z,w) - (zw,x,y)$

sustituyendo aquí x,y,z,w en lugar de w,x,y,z respectivamente tenemos que

$-f(w,x,y,z) = (xy,z,w)+(z\,w,x,y) - (yz,w,x) - (wx,y,z)$
$-f(w,x,y,z) = -((wx,y,z)+(yz,w,x) - (xy,z,w) - (zw,x,y))$

9) $f(w,x,y,z) = (wx,y,z) + (yz,w,x) - (xy,z,w) - (zw,x,y)$

luego $f(w,x,y,z) = -f(z,w,x,y)$

Mediante esta igualdad, y usando la identidad $f(w,x,y,y) = 0$ y sus linealizaciones se puede demostrar que $f(w,x,y,z) = 0$ para cualquier par de argumentos iguales.

$$f(w,x,y,z) = -f(z,w,x,y)$$

$$f(w,x,y,y) = (wx,y,y) + (y^2,w,x) - (xy,y,w) - (yw,x,y) = 0$$

$$(y^2,w,x) = (xy,y,w) + (yw,x,y)$$

$$(z\,y, w,x) + (yz,w,x) = (x\,z,y,w) + (x\,y,z,w) + (zw,x,y) + (yw,x,z)$$

$$\begin{aligned} f(w,x,y,z) &= (wx,y,z) + (yz,w,x) - (x\,y,z,w) - (zw,x,y) \\ &= (wx,y,z) +(xz,y,w)+ (yw,x,z) - (zy,w,x) \\ &= (wx,y,z) + (yw,x,z) \\ &= (wx,y,z) +(yw,x,z) \\ &= (wx,y,z) +(y,wx,z) \\ &= (wx,y,z) - (wx,y,z)= 0 \end{aligned}$$

Corolario. $f(w,x,y,z) = ([w,x], y,z) + ([y,z], w,x)$.

Demostración. Sabemos que

a) $f(w,x,y,z) = (wx,y,z) + (yz,w,x) - (xy,z,w) - (zw,x,y)$

como A es un álgebra alternativa vale la identidad $(xy,x,y) = 0$ linealizando esta identidad en ambas variables tenemos:

$(x\,y,z,w) +(zw,x,y) + (xw,z,y) +(zy,x,w) = 0$

luego tenemos

$-(xy,z,w) - (zw,x,y) = (xw,z,y) + (zy,x,w)$

sustituyendo esta expresión en (a) tenemos:

$$\begin{aligned} f(w,x,y,z) &= (wx,y,z) + (yz,w,x) +(xw,z,y)+(zy,x,w) \\ &= [(wx,y,z) + (xw,z,y)] + [(yz,w,x)+(zy,x,w)] \\ &= [(wx,y,z) - (xw,y,z)] + [(yz,w,x) - (zy,w,x] \\ &= (wx-xw,y,z) + (yz -zy,w,x) \\ &= ([w,x], y,z) +([y,z]), w,x). \end{aligned}$$

Lema 3. Sea $a,b \in A$ tal que $(a,b,A) = \{o\}$. Entonces $[a,b] \in N$.

Demostración: A es un álgebra alternativa, luego por linealización.

$$\left.\begin{aligned} &(a,b,b)= 0,\ (a,x,b) + (a,b,x) = 0 \\ &(a,a,b) = 0\ ),\ (x,a,b) + (a,x,b\ )= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{entonces}\ (x,a,b)=(a,b,x)$$

sea $x,y \in A$ elementos arbitrarios cualquiera. Entonces por definición de la función de Kleinfeld tenemos

$$f(x,y,a,b) = (xy, a,b) - y\,(x,a,b) - (y,a,b)x$$
$$f(x,y,a,b) = 0 - y0 - 0x = 0$$

por otra parte usando el corolario de lema 2 tenemos que

$$\begin{aligned} f(x,y,a,b) &= ([x,y], a,b) + ([a,b], x,y) \\ 0 &= (a,b, [x,y]) + ([a,b], x,y) \\ 0 &= 0 + ([a,b], x,y) \end{aligned}$$

por lo tanto $([a,b], x,y) = 0$ entonces $[a,b] \in N$.

Corolario 1. $[N,A] \subseteq N$.

Demostración. Por Lema 3 sabemos que si $(a,b,A) = (0)$ entonces $[a,b] \in. N$
sea $n \in N$ entonces $(n,a,A) = (0)$ entonces $[n,a] \in N$ por lo tanto $[N,A] \subseteq A$.

Corolario 2. (Fórmula nuclear escurridiza) Sea $n \in N$ y $x,y,z \in A$. Entonces

$n(x,y,z) = (nx,y,z) = (xn,y,z)=(x,y,z)n$

Demostración. $n \in N$ por hipótesis y Lema 1 parte 1 tenemos que

1) $n(x,y,z) = (nx,y,z)$

como por Corolario $[N,A] \subseteq N$ entonces $[n,x] \in N$

$([n,x],y,z) = (y,[n,x],z) = (y,z,[n,x])=0$
Si $([u,x],y,z) = 0$ si y solo si $(nx, y,z) - (x\,n, y,z) = 0$ si y solo si

2) $(n,x,y,z)= (xn, y,z)$

luego del (1) y (2) tenemos que

3) $n(x,y,z) = (nx,y,z) = (xn, y,z)$

como $n \in N$ entonces

4) $(xn,y,z)= (x,ny,z)$ lema 3 parte (2).

Además si $n \in N$ entonces $[n, y] \in N$ (por corolario 1 lema 3). Por lo tanto

$(x,[n,y],z)=0$ entonces

5) $(x,n y,z)= (x,yn,z)$. Luego de

3) ,4) y 5) tenemos que

6) $n(x,y,z) = (nx,y,z) = (xn,y,z) = (x,ny,z) = (x,yn,z)$.

usándo la identidad de Teichmüller

$(xy,n,z) + (x,y,nz) = x (y,n,z) + (x,y,n)z+(x,yn,z)$

como $n \in N$ tenemos que

7) $(x,y,nz) = (x,yn,z)$

de 6) y 7) tenemos que

8) $n(x,y,z) = (nx,y,z) = (xn,y,z) =(x,ny,z) = (x,yn,z) = (x,y,nz) = (x,y,zn) = (x,y,z)n$

luego

$$n(x,y,z) = (nx,y,z) = (xn,y,z) = (x,y,z)n.$$

Denotaremos por $ZN(A)$ el ideal del álgebra A generado por el conjunto $[N,A]$. Este ideal es como una medida de la diferencia entre el centro asociativo $N(A)$ y el centro $Z(A)$ de un álgebra alternativa $ZN(A) = \{0\}$ si y solo si $N(A)=Z(A)$.

Sea A un álgebra sobre un anillo Φ Consideremos el anillo Φ como un módulo sobre sí mismo.

El elemento idéntico 1 del anillo Φ es el generador del Φ módulo, $\Phi = \Phi \cdot 1$. Consideremos la suma directa $A^\# = A \otimes \Phi \cdot 1$ de los dos Φ – módulos A y $\Phi \cdot 1$ y definamos la operación multiplicativa en $A^\#$ del modo siguiente

$(a + \alpha \cdot 1)(b + \beta \cdot 1)= (a b + \alpha b + \beta) + \alpha \beta \cdot 1$, donde $\alpha, \beta \in \Phi$ y $a,b \in A$.

Llamaremos el álgebra $A^\#$ al *álgebra que se obtiene por adjunción formal del elemento idéntico del álgebra A*.

Tenemos que 1 es el elemento idéntico multiplicativo de $A^\#$ y además A es un subálgebra de $A^\#$.

Lema 4. $Z N (A) = [N,A] A^\# = A^\# [N,A]$.

Demostración. Veamos que $ZN(A) = [N,A] A^\#$

$\supseteq$: Sabemos que $[N,A] \in Z N (A)$ entonces $[N,A] A^\# \subseteq Z N (A)$

$\subseteq$: Veamos que $M = [N,A] A^\#$ es un ideal del álgebra A.

Por corolario 1 del lema 3 tenemos que para todo $n \in N$, $y \in A^\#$ y para cualquier $x,z \in A$

$$y[n,x] = [n,x] y + [y,[n,x]] \in M$$
$$[n,x] y \cdot z = [n,x](yz) \in M$$
$$z \cdot ([n,x]) y = (z[n,x]) y \in M A^\# = M$$

luego M es un ideal del álgebra A

$$\text{luego } [N,A] \subseteq [N,A] A^\# = M$$

como M es ideal del álgebra A tenemos que

$$ZN(A) \subseteq M$$

por lo tanto $ZN(A) = M = [N,A] A^\#$

análogamente se demuestra que

$$ZN(A) = A^\# [N,A].$$

Lema 5 (Slater). $(ZN(A),A,A) \subseteq N$.

Demostración. Dado un elemento cualquiera

$([x,n]y,z,t) \in (Z N(A), A,A)$ donde $n \in N, x,y,z,t \in A$.

aplicando la relación 4) y 1) a la siguiente expresión tenemos

$$\begin{aligned}[x(y,z,t), n] &= x [(y,z,t), n] + [x,n](y,z,t)\\ &= x[(y,z,t), n] + ([x,n] y,z,t)\end{aligned}$$

luego despejando

$$\begin{aligned}([x,n] y,z,t) &= [x(y,z,t),n] - x[(y,z,t),n]\\ &= (x(y,z,t))n - n(x(y,z,t)) - x ((y,z,t)n - n(y,z,t))\\ &= (x(y,z,t))n - n(x(y,z,t)) - x ((y,z,t)n - n (y,z,t))\\ &= x((y,z,t)n) - n(x(y,z,t)) - x((y,z,t)n + x(n(y,z,t))\end{aligned}$$

$= x(n(y,z,t)) - n(x(y,z,t))$
$= x((y,z,t)n) - n(x(y,z,t))$
$= (x(y,z,t))n - (x(y,z,t))$
$= [x(y,z,t),n] \in [A,N] \subseteq N$
$([x,n]y,z,t) \in N$

luego

$$(ZN(A),A,A) \subseteq N.$$

Lema 6. Sea $n \in N$ y $n A^{\#} n = \{o\}$. Entonces $(n)^2 = \{ 0 \}$, donde (n) es ideal del álgebra A generado por el elemento n.

Demostración: Primero veamos que: $(n) = A^{\#} n A^{\#}$

$\supseteq$: $A^{\#} n A^{\#} \subseteq (n)$ pues (n) es un ideal del álgebra} A

$\subseteq$: veamos que el conjunto $A^{\#} n A^{\#}$ es un ideal del álgebra A

$$n \in A^{\#} n A^{\#} \quad \text{pues } n = 1 \cdot n \cdot 1$$

$$\text{luego } A^{\#} n A^{\#} \neq \emptyset$$

Para todo $r \in A$ y para todo $s, t \in A^{\#}$ tenemos que

$(r,s,nt) = rs \cdot nt - r \cdot sqt$
luego
$r \cdot s\,nt = rs \cdot nt - (r,s,nt)$
$= rs \cdot nt - (r,s,tn) = rs \cdot nt - (r,s,t)n$
$= r\,s \cdot nt - n(r,s,t) \in A^{\#} n A^{\#}$

luego

$$r \cdot snt \in A^{\#} n A^{\#}$$

análogamente $snt \cdot r \in A^{\#} n A^{\#}$

$$(s,nt,r) = snt \cdot r - s\,((nt)r)$$

luego tenemos

$snt \cdot r = s \cdot (nt)r + (s,nt,r)$
$= s \cdot (nt)r + (s,tn,r)$
$= s \cdot (nt)r + (s,nt,r)$
$= s \cdot (nt)r + (sn,t,r)$
$= s \cdot (nt)r + (ns,t,r)$
$= \cdot (nt)r + n(s,t,r)$
$= s \cdot n\,(tr) + n\,(s,t,r) \in A^{\#} n A^{\#}$

luego $s\,nt \cdot r \in A^{\#} n A^{\#}$

luego $A^{\#} n A^{\#}$ es un ideal del álgebra A.

$(n) \subseteq A^{\#} n A^{\#}$ pues $A^{\#} n A^{\#}$ es un ideal de A

$(n) = A^{\#} n A^{\#}$

Por hipótesis $n A^{\#} n = \{o\}$, $n \in N$.

Veamos que $(n)^2 = \{o\}$ para lo cual basta demostrar que $r\,n\,s \cdot tnv = 0$, para cualquier $r,s,t,v \in A^{\#}$. Aplicando varias veces la relación dada en corolario 2 del lema 3) tenemos.

$(r,ns,tnv) = (r(ns) \cdot (t\,n\,v) - r \cdot (ns)(tnv)$
$(r,ns,t\,n\,v) = r\,n\,s \cdot (\,tnv - r \cdot (ns)(tnv)$
$rns \cdot t\,n\,v = r \cdot (ns)\,(tnv) + (r,ns,tnv)$
$= r[(ns)\,(tn)\,).v\,] - r\,(ns,tn,v) + n(r,s,tnv)$
$= r[n(st)n \cdot v\,] - r \cdot n(s,t,nv) + (r,s,n \cdot t\,nv)$
$= r[n(st)n \cdot v\,] - r \cdot n(s,t,nv) + (r,s,n \cdot t\,nv)$
$= r \cdot 0 - r \cdot n(s,t,v)n \cdot (s,t,v)n + 0$
$= 0 - r \cdot 0$
$= 0$

luego $r\,f\,s \cdot t\,n\,v = 0$; luego cualquiera sea $r,s,t,v \in A^{\#}$

luego $rns \cdot tnv = 0$, cualquiera sean los elementos rns, $tnv \in A^{\#} n A^{\#}$

luego $(n)^4 = \{o\}$

Lema 7 : (Moufang) Para toda álgebra alternativa A se cumplen las siguientes identidades.

$x(y\,z\,y) = [(xy)z]y$ (identidad de Moufang a derecha)
$(y\,z\,y)x = y[z(yx)]y$ (*identidad de Moufang a izquierda*)
$(xy)(zx) = x(yz)x$ (*identidad central de Moufang)*

Demostración. Veamos que el álgebra A satisface

$$(x^2, y,x) = 0 \quad \text{(identidad de Jordan)}$$

Por ser flexible y alternativa a izquierda tenemos que

$$(x,y,x) = 0\,,\ (x,x,y) = 0$$

$(xy)x = x(yx)$, $x^2 y = x\,(xy)$

luego

$(x^2 y)\,x = x\,(xy)x = x^2\,(yx)$
$(x^2 y)\,x - x^2\,(yx) = 0$
$(x^2 ,y, x) = 0$ para todo $x,y \in A$

usando esta identidad de Jordan tenemos que

$0 = (x, y^2, y) = (xy^2)\,y - x\,y^3$

luego $x\,y^3\,(x\,y^3)y = [(xy)y]y$

luego por teorema el álgebra A satisface la identidad.

$$
\begin{aligned}
0 &= \{ y^3 - [(xy)y]\, y \}\, \Delta^1{}_y(z) \\
&= \{x\, yyy - [(xy)y]y\, \}\Delta^1{}_y(z) \\
&= x(yzy) + x\,(y^2 z) + x\, z\, y^2 - [(xy)z]\, y - (x\, y^2)z - (xz)\, y^2 \\
&= (x(yzy) - [(xy)z]y) - ((x\, y^2)z - ((xz)\, y^2 - x\,(zy)) \\
&= (x(yzy) - [(xy)z]\, y - (x\, ,\, y^2, z) - (x, z, y^2) \\
&= x(yzy) - [(xy)z]y
\end{aligned}
$$

luego $x\,(yzy) = [(xy)z]\, y$

análogamente se demuestra la identidad de Moufang a izquierda $(yzy)x = y[z(yx)]$.

Finalmente

$$
\begin{aligned}
(xy)\,(zx) - x(yz)x &= -\,(xy,z,x) + (x,y,z)\, x \\
&= (z,xy,x) + (z,x,y)\, x \\
&= [z(xy)]x - z(xyx) + [(zx)y]x - [z(xy)]x \\
&= [(zx)y]x - z\,(x\, y\, x) = 0
\end{aligned}
$$

luego $(xy)(zx) = x\,(yz)\, x$

Corolario: Para un álgebra alternativa cualquiera A se cumplen las siguientes identidades.

1) $(x,y,z)x = (x,xy,z)$,
1') $x(x,y,z) = (x,yx,z)$,
2) $(x^2,y,z) = (x,x \circ y,z)$,
2') $(x^2, yz) = x \circ (x,y,z)$.

Demostración. Las identidades 1) y 1') son equivalentes a las identidades de Moufang a derecha a izquierda respectivamente.

$$(z,xy,x) + (z,x,y)x = -\,z\,(xyx) + [(zx)y]x = 0$$
$$(x,yx,z) + x(y,x,z) = (xyx)\, z - x\,[y(xz)] = 0$$

además tenemos que

$$0 = (x^2,y,x)\, \Delta^1{}_x(z) = (x \circ z,\, y,\, z) + (x^2,\, y,\, z)$$

luego $(x^2,y,z) = (x \circ z,\, y,\, z) = (y,\, x \circ z,\, z)$

Lema 8 : Sean a y b elementos de un álgebra A tal que $(a,b,A) \in N$. entonces para cualquier elemento $x \in A$ el elemento $n=(a,b,x)$ pertenece a N y $(n)^2 = \{o\}$

Demostración: Sean y,z elementos cualquiera del álgebra A. Por corolario de las identidades de Moufang tenemos que

$$(x,y,z)x = (x,xy,z)$$

linealizando dicha expresión tenemos que

$$(n,y,z)x + (x,y,z)n = (n,xy,z) + (x,ny,z)$$

luego despejando

$(x,y,z)\, n = -\,(n,y,z)x + (n,xy,z) + (x,ny,z)$
tomando $x = a$ y $n = ((a,b,y) \in N$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
(a,y,z)(a,b,y) &= -\,((a,b,y),y,z) + ((a,b,y),ay,z) + (x,(a,b,y)y,z) \\
&= (x,(a,b,y)y,z) \\
&= (x,(a,b,y^2\,),z) = 0
\end{aligned}
$$

análogamente tenemos que

$$x(x,y,z) = (x,yx,z)$$

linealizando dicha expresión tenemos que

$n(x,y,z) + x(n,y,z) = (n,yx,z) + (x,yn,z)$
$n(x,y,z) = -\,x(n,y,z) + (n,yx,z) + (x,y\, n,z)$
tomando $n = (a,b,y) \in N$ y $x = a$ tenemos
$(a,b,y)(a,y,z) = -\, x((a,b,y),y,z) + ((a,b,y),ya,z) + (a,y(a,b,y),z)$
$= 0 + 0 + (a,(a,b,y)y,z) = (a,(a,b,y^2),z) = 0$

sea $(y,x,z)y = (y,yx,z)$ linealizando tenemos que

$(a,x,z)\, y + (y,x,z)a = (a,yx,z) + (y,ax,z)$
$(a,x,z)y = -\,(y,x,z)a + (a,yx,z) + (y,ax,z)$

tomando $x = b$ tenemos que

$$(a,b,z)\, y = -\,(y,b,z)a + (a,ya,z) + (y,ab,z)$$

$(a,b,z)\, y\, (a,b,z) = -(y,b,z)a \cdot (a,b,z) + (a,ya,z)(a,b,z) + (y,ab,z)(a,b,z)$
$= -\,(y,b,z) \cdot a(a,b,z) + (a,ya,z)(a,b,z) + (y,ab,z)\,(a,b,z)$
$= -\,(y,b,z)\,(a,ab,z) = 0$

luego tenemos que

$n\, A^{\#} n = \{o\}$ luego tenemos que

$(n)^4 = \{o\}$

Corolario. Si el álgebra alternativa A es simple y no asociativa, entonces N = Z.

Demostración: Si N no está incluido en Z entonces $ZN(A) \neq \{0\}$

pero como el álgebra es simple tenemos que $ZN(A) = A$.

Pero por lema 5 (Slater) el álgebra satisface la identidad

$(x,y,z),r,s)) = 0$.

Dado que A es no asociativa, entonces existe un elemento $n=(x,y,z) \neq 0$ y $n=(x,y,z) \in N$ además

por lema 7 tenemos que $(n)^5 = \{o\}$ y como A es simple tenemos que $(n) = \{o\}$ entonces $n = 0$

contradicción, luego N =A.

Teorema 3. (Artin).

En toda álgebra alternativa cualquier par de elementos de ella generan un subálgebra asociativa.

Demostración. Sea A un álgebra alternativa y B la subálgebra generada por el par de elementos

$a, b \in A$.

Demostrar que B es asociativa es probar que para productos finitos los elementos arbitrarios

u_1, u_2 y u_3 donde $u_i = u_i(a,b)$, i= 1,2,3 se satisface la condición.

$(u_1, u_2, u_3) = 0$.

La demostración se hace por inducción sobre el número $n = d(u_1) + d(u_2) + d(u_3)$ donde

$d(u_i)$ es el número de factores en u_i, $i = 1,2,3$ si $n =3$ es el primer paso del proceso inductivo se cumple por condiciones de flexibilidad e identidades alternativas a izquierda y derecha.

Si $n > 3$ y v_1, v_2, v_3 son productos finitos de a y b con $d(v_1) + d(v_2)+d(v_3) < n$ tal que

$(v_1, v_2, v_3)= 0$ (*Hipótesis Inductiva*).

Sin pérdida de generalidad consideremos

$u_1 = \lambda_1 a$ y $u_2= \lambda_2 a$; $i \in A$, $i = 1,2$.

Luego por linealización de la identidad de Moufang tenemos

$(u_1, u_2,u_3) = (\lambda_1 a , \lambda_2 a, u_3) = -(\lambda_1 u_3, \lambda_2 a,a) + a(\lambda_1, \lambda_2 a, u_2) +u_3(\lambda_1, \lambda_2 a,a)$

$= -(\lambda_1 u_3, \lambda_2 a,a) = -a(\lambda_1 u_3, \lambda_2 ,a) \in= 0$ pues $d(\lambda_1 u_3) + d(\lambda_2) + d(a) < n$.

Corolario. Toda álgebra alternativa es asociativa en sus potencias.

Proposición 2. Supongamos que el álgebra alternativa A verifica la siguiente Identidad $[x,y]^n = 0$. Entonces, los elementos nilpotentes de A forman un ideal de A.

Demostración: Consideremos inicialmente el caso en que A es un álgebra asociativa.

Sea I el nil-ideal máximal de A entonces $\bar{A} = A / I$ es un álgebra cociente que no tiene nil-ideales biláteros no nulos. Supongamos que existe un elemento nilpotente $\bar{x} \in \bar{A}$ tal que $\bar{x}^2 = 0$. Consideremos el ideal a mano derecha $\bar{x}\bar{A}$. Para cualquier $y \in \bar{A}$ tenemos que

$O = [\bar{x},\bar{y}]^n (xy)$

$= xy^{n+1}$

Así que el ideal $\bar{x}\bar{A}$ es nil-ideal a mano derecha de índice n + 1. Luego por el teorema de Levitzki que afirma lo siguiente «toda nil- álgebra asociativa finitamente generada que satisface una identidad polinomial, es nilpotente», el ideal $\bar{x}\bar{A}$ es localmente nilpotente.

Observemos que $\bar{x}\bar{A} \neq \{o\}$, dado que si $\bar{x}\bar{A} = \{o\}$, entonces $\bar{x}$ genera un ideal bilátero no nulo de A, lo cual no puede ser. Pero entonces el radical de Levitzki $L(\bar{A})$ de $\bar{A}$ (es decir el radical localmente nilpotente) es no nulo, lo cual no puede ser pues $\bar{A}$ no tiene nil-ideales no nulos y L(A) es un nil-ideal bilateral de A.

Supongamos que A es un álgebra alternativa, sea $x,y \in A$ dos elementos nilpotentes de A, luego por teorema de Artin («En toda álgebra alternativa A, dos elementos cualquiera de ella generan una subálgebra asociativa de A»). Sea B el álgebra generada por el par de elementos $x, y \in A$, luego B es un álgebra asociativa, por lo tanto vale lo demostrado inicialmente, los elementos nilpotentes de B forman el ideal pedido Ni (B). De lo cual se desprende que x + y es nilpotente y que si x es nilpotente, y es un elemento cualquiera de A entonces xy, yx son elementos nilpotentes.

Definición 14. Un álgebra es *nilpotente* si existe un número natural mínimo n tal que $A^n = \{o\}$.

Además un elemento x de A es nilpotente si la subálgebra generada por dicho elemento es nilpotente.

Definición 15. Diremos que *un álgebra A es localmente nilpotente* si toda subálgebra B de A finitamente generada es nilpotente.

Lema 9. Sea A álgebra conmutativa. Entonces

$(x,y,z)^2 = 0$, para todo $x,y,z \in A$.

Demostración Veamos que el álgebra conmutativa satisface la siguiente identidad.

$$1)\ 4(x,(x,y,z),z) = 0$$

en efecto tenemos que

$$\begin{aligned}
4(x,(x,y,z),z) &= 4\,([x(x,y,z)]z - x[(x,y,z)z]) \\
&= 4\,[x(x,y,z)]z - 4x\,[(x,y,z)z] \\
&= [x(x,y,z)]z + [x(x,y,z)]z \\
&\quad + [x(x,y,z)]z+[x(x,y,z)]z - \{x[x(x,y,z)z] \\
&\quad + x\,[(x,y,z)z]+ x\,[(x,y,z)z]+ x[(x,y,z)z]\,\} \\
&= [x(x,y,z)]+ [(x,yz)x]\,z+z[x(x,y,z) + \\
&\quad (x,y,z)x] \\
&\quad - \{x[(x,y,z)z+z(x,y,z)] +[(x,y,z)z+z(x,y,z)] \\
&\quad x\,\} \\
&= [x \circ (x,y,z)]z + z[x \circ (x,y,z)] - \{x[(x,y,z) \\
&\quad \circ z+ [(x,y,z) \circ z]x\} \\
&= [x \circ (x,y,z)] \circ z - x \circ[(x,y,z) \circ z] \\
&= (x^2,y,z) \circ z - x \circ (x,y,z^2) \\
&= (x^2,y,z^2) - (x^2,y, z^2) = 0
\end{aligned}$$

Por corolario 1 de lema 1 tenemos que

$0 =3(x,y,z)\ 3\ (x,y,z)= 9\ (x,y,z)$

de las identidades de Moufang y relación (1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
8(x,y,z)^2 &= 4 \cdot 2\ (x,y,z)^2= 4\ [(x,y,z)^2+ (x,y,z)^2] \\
&= 4\ [(x,y,z) \circ (x,y,z)] \\
&= 4\ (x,(x,y,z) \circ y,z) - 4\ y \circ (x,(x,(x,y,z),z) \\
&= 4\ (x,(x,y^2 ,z)z) - 4\ (x,(x,y,z),z) \circ y \\
&\ \ 4(x,(x,y^2,z),z) - 0 \circ y \\
&= 4(x,(x,y^2, z),z) =0
\end{aligned}$$

luego

$$(x,y,z)^2 = 9\ (x,y,z)^2 - 8\ (x,y,z)^2 = 0 - 0 = 0\ ,$$

luego finalmente $(x,y,z)^2 = 0$

3. Conclusión

Teorema 4. (Zhelakov)

Un álgebra alternativa conmutativa simple A es un cuerpo.

Demostración. Por la proposición 2, todos los elementos nilpotentes del álgebra A forman un ideal I. A no es asociativa, entonces por lema 8 $I \neq \{o\}$ y por lo tanto como A es simple por hipótesis necesariamente I = A, por lo cual A es una nilálgebra. El álgebra A es conmutativa por hipótesis, por lo tanto satisface una identidad polinomial esencial. Por teorema, A es localmente nilpotente, pero por proposición 1 (no existen álgebras nilpotentes simples) contradiciendo la simplicidad de A. Por lo cual A es asociativa, y por lo tanto A es un cuerpo.

Bibliografía

1) Bouvier, A. & George, M., Diccionario de Matemáticas, Akal editor, Madrid, 1984.

2) Bourier, Alain et George Michel, Diccionnare des mathématiques, Presses Universitaires de France, París 1979.

3) Schafer, Richard D., An introduction to nonassociative algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1994.

4) Zhevlakov K.A., Slin'ko A.M., J.P. Shestakov, Shirshov, A.I. Ring that are nearly associative, Academic Press, New York, 1982.