PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE THALES MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROPOSAL FOR THE TEACHING OF THALES' THEOREM THROUGH PROBLEM-SOLVING

Danilo Díaz Levicoy,
Estudiante Pedagogía en Matemática y Computación
Universidad de Los Lagos

Fernando Mundaca Pacheco
Licenciado en Matemáticas
Estudiante Programa de Formación Pedagógica
Pontificia Universidad Católica de Chile

Jonathan Vergara Cariqueo
Estudiante Pedagogía en Matemática e Informática Educativa
Universidad Católica Silva Henríquez

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Thales mediante la resolución de problemas. Surge luego del análisis del tratamiento de este tema, tanto el la educación secundaria chilena como francesa, en marco del Programa de Estudios en el extranjero para Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas desarrollado en el Instituto Universitario de Formación de Maestros, Toulouse, Francia.

Los pilares considerados para este trabajo son: los bajos niveles de logro alcanzado por los estudiantes en geometría (Corberan, et al, 1994) y la importancia de trabajar la resolución de problemas (Gaulín, 2001), (Aravena, 2009), (Pólya, 1990).

El objetivo que alberga esta propuesta es lograr que los estudiantes aprendan a trabajar los contenidos matemáticos mediante la resolución de problemas, logrando que el alumno se haga parte esencial de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Para lo cual hemos querido plantear una serie de situaciones problemas, tanto en la introducían al tema, así como también para las actividades de clase y evaluación. Además de la presentación de la demostración del teorema de Thales.

Palabras Claves: Teorema de Thales – Resolución de Problemas - Semejanza - Planes y Programas.

Abstract

In this research a proposal for the teaching and learning of Thales' theorem through problem-solving is presented. It arises from the analysis of the approaches, in both, the Chilean and French secondary education systems towards this matter, within the framework of the Study Abroad Program for people studying to become Mathematics teachers, developed by the Teacher Training Institute from the University of Toulouse, in France. The main pillars considered in this study are, the low levels of achievement accomplished by geometry students (Corberan, et al, 1994) and the importance attributed to problem-solving (Gaulín, 2001; Aravena, 2009; Pólva, 1990). The objective of this proposal is to get the students to learn to deal with mathematical contents by using problem-solving. By doing this, it is intended to train students, who are more active participants in their own teaching-learning process. In order to attain this objective we have posed a number of problematic situations, both in the introduction to the topic, and in the class activities and evaluations. It is also done so in the demonstration of Thales' theorem.

Key words: Thales' theorem – Problem-solving - Likeness – Plans and Programs.

Introducción.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la una parte fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles Educacionales, pues mediante estas situaciones los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de la matemática en diferentes contextos y situaciones, especialmente en el mundo que les rodea. Por otro lado, diferentes investigaciones dejan en evidencia las dificultades de los estudiantes del sistema educativo chileno frente a la resolución de problemas y que las situaciones planteadas por el profesor corresponden a contextos matemáticos, con única solución y generalmente alejadas del entorno del estudiante.

También, existen investigaciones que dan cuenta de la dificultad compartida en el proceso de enseñanza aprendizaje, por alumnos y profesores en el área de la geometría. Al respecto, se han formulado varias explicaciones sobre cómo aprenden geometría los alumnos y sobre cómo evoluciona el pensamiento en relación a la resolución de ejercicios y problemas. Considerando lo anterior, es que nace esta propuesta que comenzamos a desarrollar a continuación.

Problemática.

A continuación se presentan algunas problemáticas que vive la educación matemática de nuestro país y que serán la base para la creación de esta propuesta:

- Dificultades en la resolución de problemas
- Rechazo a la asignatura de matemática
- Los estudiantes tienen un alto rechazo a la resolución de problemas, producto de la forma que lo han venido trabajando desde la enseñanza básica, con problemas alejados de su realidad y sin que ellos sean participe activo de la búsqueda de soluciones.
- Alta dependencia en el profesor por parte de los estudiantes al desarrollar actividades
- Algoritmización de la geometría y de la matemática en general
- Falta de continuidad en las contenidos geométricos
- Bajo nivel de desarrollo del pensamiento geométrico
- Los alumnos les cuesta modelar matemáticamente los enunciados de un problema.
- Los alumnos se sienten cómodos al estar trabajando con problemas que se relaciona con su entrono y en el mismo.

Marco Teórico

Teorema de Thales en los Planes y Programas del Ministerio de Educación.

En los planes de estudio del Segundo año medio, dentro de la unidad de ***Semejanza de Figuras Planas***, se plantea el trabajo con el Teorema de Thales mediante los siguientes contenidos:

- Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dad.
- Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales.

Aprendizajes esperados:

- Conocen el Teorema de Thales sobre proporcionalidad de trazos y lo aplican en la resolución de problemas.

Teorema de Thales y Semejanza

Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, y desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que creemos que deben tenerse presentes cuando se la considera como objeto de enseñanza:

- Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.
- Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transFormaciónes.

Comparación Chile – Francia en torno al Teorema de Thales

En Chile, el Teorema de Thales es uno de los contenidos del Segundo año de la educación secundaria presente en los Planes y Programas del Ministerio de Educación dentro de la unidad de **Semejanza de figuras planas**.

En el sistema francés, los estudiantes trabajan primero el Teorema de Thales y después la Semejanza, esto en diferentes años. Es así, como en Quatriéme se trabaja los triángulos y rectas paralelas, donde se aborda la proporcionalidad de trazos y conocen demostraciones del Teorema de Thales. En Troisiéme se desarrolla el Teorema de Thales y su recíproco. Finalmente en Seconde se trabajan la Semejanza de triángulos. Es importante considerar el importante papel de la justificación y de la demostración, no así en nuestro país, donde el procedimiento algorítmico cumple un rol fundamental.

Teorema de Thales

Si tres o más paralelas son cortadas por transversales, la razón entre las medidas de dos segmentos cualesquiera cortados por una transversal será igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes de la otra, es decir, son proporcionales.

Ejercicios y Problemas

No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema, pues el resolver un ejercicio es la aplicación de un algoritmo en forma mecánica, mientras que resolver un problema, significa dar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto y que para determinar su solución generalmente no existe un mecanismo predeterminado.

Es de común acuerdo, que la resolución de problemas es una parte esencial de la formación matemática de los estudiantes, pues permite experimentan la potencia y utilidad de la matemática en diferentes situaciones de la vida cotidiana, y por otro lado permite el desarrolla del pensamiento lógico-matemático.

Gaulín (2001) señala:

"Polya dice: "Hacer Matemáticas es resolver problemas", y para dar una buena idea a los alumnos de lo que es hacer Matemáticas, hay que darles problemas para resolver, problemas., no ejercicios...,¡¡problemas!!, para buscar, reflexionar, buscar mucho, investigar..."

Modelo de Polya en la Resolución de Problemas

Polya (1957) hizo una formulación de cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. *Comprender el problema*: resume la información dada y que deseas determinar.
2. *Desarrollar un plan:* expresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Busca patrones.
3. *LLevar a cabo el plan:* resuelve la ecuación, evalúa la fórmula, identifica el término constante del patrón, según sea el caso.
4. *Revisar*: es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

Clasificación Díaz & Pobrete

La resolución de tipos de problemas las clasificamos según su naturaleza en rutinarios y no rutinarios, y según su contexto, en real realista, fantasista y puramente matemático (Díaz & Poblete, 1994).

Problemas rutinarios:

Problemas de Contexto Real: Un contexto es real si se puede efectuar en la realidad y compromete el accionar del estudiante en la misma.

Problema de Contexto Realista: Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.

Problema de Contexto Fantasista: Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.

Problema de Contexto Puramente Matemático: Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusiva a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.

Problemas no rutinarios:

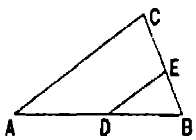
Un problema es no rutinario cuando el alumno no tiene un procedimiento conocido para resolverlo.

ACTIVIDADES TIPICAS SOBRE EL TEOREMA DE THALES EN EL SISTEMA CHILENO

A continuación se expone un grupo de ejercicios que se presentan en la Web y que son trabajados por los alumnos.

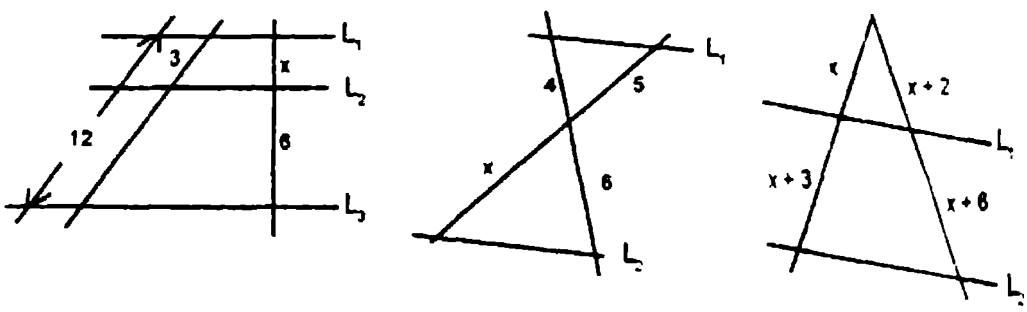
Ejemplo Web 1

Calcula la medida del segmento *DE* de la figura sabiendo que $BE = 4$ cm, $EC = 6$ cm y $AC = 20$ cm, y que la recta AC es paralela a *DE*.



Ejemplo Web 2: (www.sectormatematica.cl)

En las siguientes situaciones, las rectas: $L_1, L_2, L_{3,...}$ etc. son paralelas. Determine el valor de "x"



Formas de Resolver un mismo Problema: Chile v/s Francia

Sea IJK un triángulo donde el segmento $(OU)//(JK)$, $IJ = 8$ cm, $IO = 3$ cm, $IK = 10$ cm y OU 0 4 cm. Calcular la medida de los segmentos $[IU]$ y $[JK]$.

Solución con el modelo chileno

Para calcular $[IU]$

$$\frac{3}{8}=\frac{x}{10}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 18}{8}=3{,}75$$

Para calcular

$$[JK]\ \frac{10}{x}=\frac{3{,}75}{4}\Rightarrow x=\frac{40}{3{,}75}\approx 10{,}7$$

Por lo tanto, las medidas de los segmentos$\Rightarrow$ $[IU]$ y $[JK]$ son 3,75 y 10,7 cm.

Solución con el modelo Frances

1. Dentro del enunciando del ejercicio o problema, se identifican las condiciones, los datos y incógnitas que se relacionen con el Teorema de Thales.

   El punto $O \in$ y $[IK]$

   El punto $U \in$ y $[JK]$

2. Las rectas (OU) y (JK) son paralelas
3. Utilizando el Teorema de Thales, se tiene:

$$\frac{IO}{IJ}=\frac{IU}{IK}=\frac{OU}{JK}$$

4. Reemplazando en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{3}{8}=\frac{IU}{10}=\frac{4}{JK}$$

5. En particular

$$\frac{3}{8}=\frac{IU}{10}\Rightarrow IU=\frac{30}{8}=3{,}75 \text{ y}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{4}{JK}\Rightarrow JK=\frac{32}{3}\approx 10{,}7$$

6. Conclusión:

Por lo tanto, las medidas de los segmentos $[IU]$ y $[JK]$ son 3,75 y 10,7 cm.

Al hacer la comparación de la forma que tiene para resolver estos problemas, provocan una profunda reflexión sobre las diferencia entre la formación que entrega. En el caso del sistema chileno, existe una algoritmización de los procesos de enseñanza y visto desde el tema de esta trabajo (Teorema de Thales). Por otro lado, el sistema francés esta centrado en la justificación de procedimientos y que estos luego las llevará a una explicación que les permitirá solucionar el problema. Es de esta forma como se contribuye al desarrollo del Pensamiento Matemático y Geométrico de los estudiantes, por priorizar la búsqueda de condiciones para la aplicación del Teorema de Thales, la justificación y la búsqueda de la rigurosidad.

Dentro de nuestra propuesta de enseñanza del Teorema de Thales en nuestro país, creemos que es de vital importancia introducir la verificación de los datos e hipótesis, previo a la aplicación del algoritmo, pues está entregando herramientas sólidas para el desarrollo de la rigurosidad del Pensamiento Geométrico.

Propuesta

1.CONOCIMIENTOS PREVIOS

Bajo el contexto Educacional chileno, es posible apreciar que en el sentido cronológico propuesto por los programas de estudio, se tiene que el contenido de semejanza de triángulos. Desde este punto de partida, tendremos que, para dar un soporte matemático al estudio del Teorema de Thales, establecer ciertas definiciones y resultados que son importantes:

- **Definición**: Una semejanza plana es una aplicación dentro de un mismo plano que conserva los ángulos geométricos (entendiendo como ángulo geométrico, aquel que se diferencia del ángulo orientado).
- **Definición**: Una semejanza se dice directa si ella conserva los ángulos orientados.
- **Teorema**: Toda semejanza es la composición de una isometría por una homotecia de razón positiva.
- **Corolario del teorema anterior**: Toda semejanza conserva la razón (proporción) de longitud.

De acuerdo con esto, podría presentarse el Teorema de Thales como un caso particular de triángulos semejantes, en el cual la configuración obedece a ciertas restricciones, es decir, compartir un vértice común, que los vértices de los lados de los triángulos correspondientes estén alineados y la relación de paralelismo entre los lados opuestos al vértice común.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, es necesario contar con elementos y contenidos bases que permitan el estudio de este teorema, desde esta perspectiva. Entre los cuales mencionamos:

- Cálculo de áreas de triángulos, geometría métrica
- Proporcionalidad numérica
- Nociones de geometría euclidiana: ángulo, semejanza, paralelismo de rectas y segmentos.

2. El problema de Introducción.

El origen del Teorema de Thales tiene su trascendencia en el trabajo de las alturas y las sombras que proyectan, es por eso que se pretende introducir este concepto con el siguiente problema:

La pirámide de Keops tiene una base cuadrada. Dice la leyenda que Thales midió su altura observando que la sombra proyectada por la pirámide era de 85 metros desde el centro de la base y colocando su bastón de 1,46 metros en el punto donde acababa la sombra, midió la que proyectaba el bastón, el cual media 2 metros. ¿Qué altura tiene la pirámide?

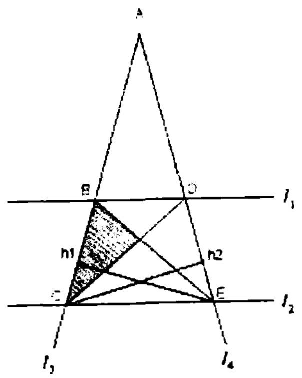
3. La Demostración del Teorema de Thales.

Para la formalización de este teorema, se recomiendo utilizar una de las demostraciones más sencillas y conocidas, que es la presentada en *Los Elementos* de Euclides y que es relativa a las áreas, como se presenta a continuación:

Demostración:

Sean $l_1 // l_2$ y l_3, l_4 dos rectas que se intersectan en A, tal que:

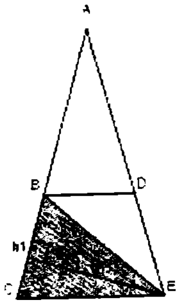
$l_3 \cap l_1 = B$ $\quad$ $l_3 \cap l_2 = C$ $\quad$ $l_4 \cap l_1 = D$ $\quad$ $l_4 \cap l_2 = E$



Área CBE = área CDE

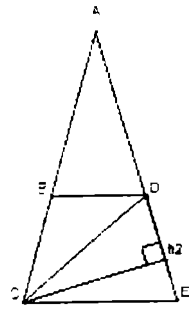
Por lo tanto, Área ABE = área ACD

Luego,



$$\frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{AD \cdot h_2}{2}$$

$$\frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{DE \cdot h_2}{2}$$



De esta relación algebraica obtenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

y por otra parte

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Q. E. D.

Elementos a considerar

- Teorema 1

Para dos triángulos, cuya base sea la misma, y también su altura, entonces las áreas correspondientes son iguales.

De este teorema, es posible observar otro resultado que resulta importante para el estudio de la demostración.

- Teorema 2

Dados dos triángulos de igual base, cuyos vértices opuestos a ésta están sobre una recta paralela a la base tienen igual área.

- División algebraica

En el caso

$$\frac{AB\cdot h_I}{2} = \frac{AD\cdot h_I}{2}$$

dividido por

$$\frac{BC\cdot h_I}{2} = \frac{DE\cdot h_I}{2}$$

Si $A = B$, y sean $C = D \neq 0$

$$A = B /: C$$

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$$

Pero como $C = D$

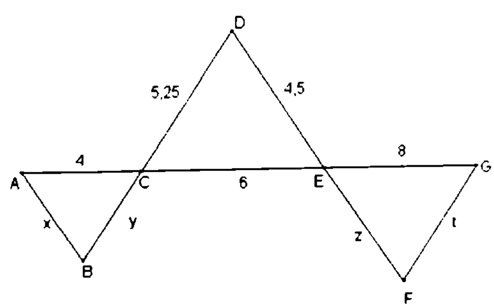
$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C} \Rightarrow \frac{A}{D} = \frac{B}{D} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

Por supuesto, la demostración al teorema es posterior al problema que dio paso a la observación de esta propiedad. Ya desde la época de los griegos, y su incansable trabajo por conocer los patrones que regían el mundo en que vivían, presentaban el problema de la comparación entre las sombras que proyectaban en un mismo instante y bajo una misma fuente luminosa, dos objetos con determinadas dimensiones.

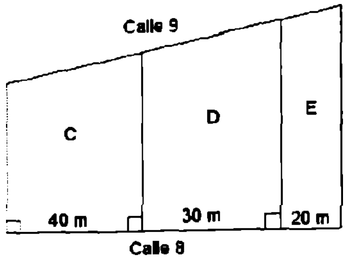
La intuición nos dirá (y también a los griegos) que dos objetos proyectaran sobre una superficie una sombra de igual medida siempre y cuando estos objetos tengan a su vez, medidas iguales (obviamente bajo condiciones ideales). Sin embargo, ¿Qué pasará con la proyección de la sombra, en estas condiciones ideales, para dos objetos en los cuales uno de ellos tiene el doble de altura que el otro?

4. PROBLEMAS PARA TRABAJAR EN CLASES Y DE EVALUACIÓN

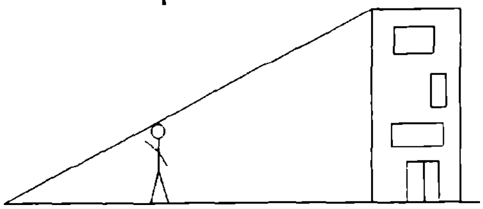
1. Sabiendo que (AB)//(DE) y (CD)//(FG). Calcular x, y, z, t y el perímetro de la figura (las unidades están todas en centímetro).



2. La siguiente gráfica muestra tres sitios que colindan uno a uno. Los límites laterales son segmentos perpendiculares a la calle 8 y el frente total de los tres lotes en la calle 9 mide 120 metros. Determine la longitud de cada uno de los lotes de la calle 9.



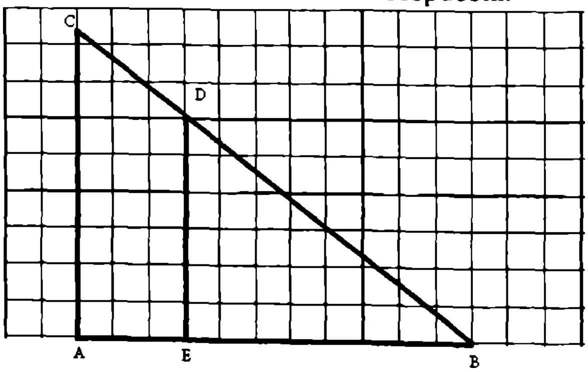
3. Un hombre de 1.8 m de estatura proyecta una sombra de 1.05 m de largo al mismo tiempo que un edificio proyecta una sombra de 4.8 m de largo. ¿Cuál es la altura aproximada del edificio?



4. Dado un triángulo de lados 5, 6 y 8 cm. Se traza un segmento de 3 cm paralelo a un lado. Encontrar las dimensiones de los segmentos generados por la intersección del triángulo y el segmento.
5. En la figura, $AC = 14$ cm, $AE = 21$ cm y $AD{:}DE = 4{:}3$. ¿Cuál(es) de la(s) siguientes afirmación(es) es(son) verdadera(s)?

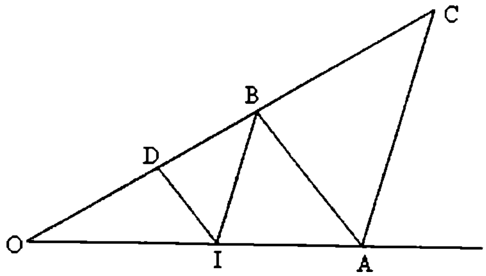
a. $DB{:}EC = 4{:}\ 3$
b. $AD + BC = 18$ cm
c. $DB = \sqrt{80}$ cm

6. Si en la siguiente figura, cada lado del cuadrado mide 1 cm. Encontrar la medida de cada uno de los segmentos faltantes, es decir, AC, AE, BC, BD, CD. Justifica adecuadamente tu respuesta.



7. Dado el triángulo ABC y el segmento *(DE)//(AB)* y corta a *[AC]* en D y a *[BC]* en E. Si $AB = 3$ cm, $DE = 1{,}8$ cm, CD = $x - 1$ y $DA = x + 1$. Calcular x, analiza y justifica tu respuesta.

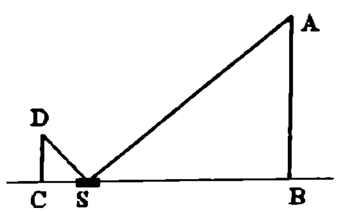
8. Dado la siguiente la figura, donde *(IB)//(AC) y (AB)//(ID)*



Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes igualdades:

$$OC\frac{OB \cdot OA}{AD} \text{ y } OD=\frac{OB}{OA}\cdot OI$$

9. Garfield por comerse toda la lasaña de John, se subió hasta la copa de un árbol (AB). John coloca un espejo(S) sobre el terreno y se aleja de él hasta el punto C, desde el cual ve la copa. Si John (DC) mide 1,7 m, la distancia de John al espejo es de 3 m y del espejo al arbol12 m., ¿Qué altura tiene el árbol al cual se subió Garfield? Resolver el problema recurriendo a la configuración del Teorema de Thales. Justifica tu respuesta.



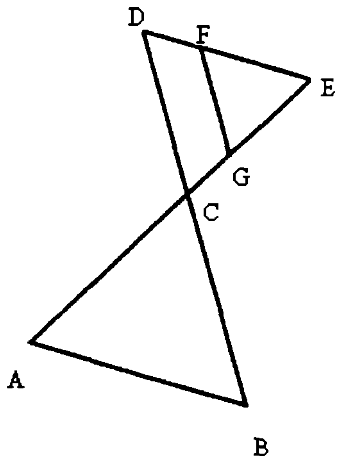
10. Trazar un cuadrilátero AEIO y sus diagonales, los puntos B, C, D y F son los puntos medios de los segmentos *[AE]*, *[IE]*, *[IO]* y *[OA]*. Probar que $AI = 2 \cdot BC$

11. Blanca Nieves mide 1,6 m., a una cierta hora del día proyecta una sombra de 2,4 m y uno de los enanitos proyecta una de 75 cm, estas sombras que está alineado y tienen el mismo extremo. ¿Cuál es la altura del enanito?

2. PROBLEMAS APLICADOS A OTRAS UNIDADES

Unidad 6 de Segundo Medio: Sistemas de ecuaciones lineales

En la figura que se muestra a continuación, $(AB)//(DE)$ y $(CD)//(FG)$. Si $AC=x+4$, $BC=x+1$, $CD=y+3$, $CG=x-0{,}8$, $GE=x+2{,}4$, $FG=x$



Unidad 1 de Tercero Medio: Las funciones cuadráticas y raíz cuadrada

Dada la figura que se presenta a continuación, donde $L_1//L_2//L_3$. Determinar el valor de x y los supuestos que se asumen como validos para obtener el resultado.

Consideraciones Finales

- Con esta humilde propuesta, queremos aportar a los profesores de matemática actividades centradas en la resolución de problemas, que tradicionalmente no han sido abordadas en la educación secundaria chilena, así como los problemas que tienen más de una solución o que no existe porque está fuera de contexto;
- Problemas que integren lo geométrico y lo algebraico, además de permitir una continuidad de los contenidos vistos durante los años de educación secundaria.
- La resolución de problemas aporta significativamente al desarrollo del pensamiento matemático, logrando que los sistemas educativos entreguen a la sociedad personas matemáticamente competentes.

Bibliografía:

ARAVENA, M. (2009) Resolución de problemas y modelización matemática en la formación inicial de profesores. Acta IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt, Chile.

BRACONNE-MICHOUX, A. et al. (2008) Math 3e. Hachette Éducation - Collection Diabolo. Paris, Francia.

CORBERAN, R.; GUTIERREZ, A.; HUERTA, M.; PASTOR, A.; MARGARIT, J. B., PEÑAS, A.; Y RUÍZ, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría General Técnica. Centro de publicaciones. Madrid

DÍAZ, D. (2008) Sistema de ecuaciones: Una experiencia con resolución de problemas. Acta I Congreso Nacional de Estudiantes de Pedagogía en Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

DÍAZ, V. (1994). Una evaluación de la resolución de tipos de problemas en Cálculo Diferencial. Tesis de Magíster. Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación. Chile.

ESCUDERO, I (2005) Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. 23(3), 379–392

FREYCENET, P. et al. (2007) Math 4^{e}. Hachette Éducation - Collection Diabolo. Paris, Francia.

GAULÍN, D. (2001) Tendencias actuales de la resolución de problemas. Revista SIGMA. N°. 19, pags. 51-63

HANOUCH, B. et al. (2004) Math 2^{e}. Hachette Éducation - Collection Diabolo. Paris, Francia.

LEMONIDIS, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. Recherches en Didactique des Mathématiques, 11(23), pp. 295-324.

MINEDUC (2004). Matemática, Programa de Estudio Segundo Año Medio. Segunda Edición, Santiago. Chile