

# REPRESENTACIONES COTIDIANAS DE LÍMITE, OBSTÁCULO SOCIOCULTURAL AL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO MATEMÁTICO<sup>1</sup>

Leonora Díaz Moreno<sup>2</sup>

---

## Resumen

Se describe un obstáculo sociocultural para la apropiación del concepto de límite de la matemática del cambio, en el nivel terciario de estudios, a saber, la representación cotidiana de límite. Esta evidencia se obtiene como parte de una investigación que aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de límite y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes. En lo metodológico, se recurrió a la noción de representación para develar las ideaciones estudiantiles y al análisis estructural para interpretar los discursos estudiantiles.

**Palabras Clave:** Representaciones Estudiantiles, Pensamiento Variacional, Obstáculo Sociocultural.

## Abstract

This article describes a sociocultural obstacle to the significant learning of the concept of boundary in the mathematics of change at the tertiary level of studies, i. e., the everyday representation of limit or boundary. The evidence is obtained from a piece of research which tries to answer the question of the routine representations of limit and those of mathematical representation that favor or obstruct the configuration of a variational thought in students. Regarding the methodological aspects, structural analysis is used to interpret discourses speeches and the notion of representation to understand the nature of the students' ideas.

**Key words:** Students' Representations, Variational Thought, Sociocultural Obstacle.

## Introducción

Los desafíos que abordan profesores y profesoras, investigadores e investigadoras en el campo de los aprendizajes dicen relación con una labor formadora, que no solo informe sino que persiga entendimientos significativos por parte de los ciudadanos, atendiendo al desafío que resta pendiente en nuestra sociedad y que es la democratización de estos saberes. Empresa de tal envergadura demanda la participación de comunidades de profesionales de la educación que avancen colaborativamente en la configuración de sus teorías y recurran a metodologías tanto propias como apropiadas, constituyendo así un cuerpo de saberes que favorezca su construcción en las aulas, en un itinerario abierto. ¿Cómo se construyen saberes en el aula? Se cuenta con ejemplos (ver Díaz, 2002, pp.22-23) que muestran nuevas facetas e interacciones dialécticas en la unidad de análisis del triángulo didáctico, a saber, estudiantes, profesorado y saberes escolares participando en interacciones dialécticas. Los actores y contenidos cobran vida en el aula, la que a su vez está inserta en un contexto. Los procesos formativos son complejos. Por lo general los estudiantes aprenden parte de lo que se les enseña, hecho que se ve reflejado en las distancias existentes entre un currículum prescrito, uno vivido por el profesorado y estudiantes, además de otro currículum oculto, subyacente a los dos anteriores. Ante tal escenario

¿cómo hacer para que los procesos formativos no se constituyan en verdaderos filtros para producir la segmentación social, sino en oportunidades para que los estudiantes de todos los estratos sociales se apropien de conocimientos poderosos que les permitan tener una vida más interesante, productiva y participativa? Al convertir esta interrogante en tres objetivos, vemos que ellos están directamente relacionados, a la vez, con otros tres objetivos formativos más generales, relacionados con la naturaleza cultural (una vida más interesante), la función económica (una vida más productiva) y un objetivo político (una vida con más participación ciudadana).

### **Del estado del arte sobre los aprendizajes**

Hoy se cuenta con bases teóricas y empíricas para robustecer la manera en que generamos conocimiento abordando la pregunta ¿Cómo es que se construyen saberes en el aula? Mencionamos como ejemplo los desarrollos de una didáctica fundamental iniciada con las distinciones que inaugura Brousseau (1987), una didáctica fenomenológica que arranca de distinciones de Freudenthal (Soto, 1993) y una didáctica socioepistemológica de raíces latinoamericanas, que se inscribe en los desarrollos de la matemática educativa en nuestro continente (Cantoral, 2004). Como resultado de ello, nociones centrales de una didáctica que llamamos científico-crítica, vienen instalándose desde mediados de la década del setenta. Originarios del campo de la enseñanza y los aprendizajes en matemáticas, se vienen transfiriendo a la enseñanza de otras disciplinas del currículum. Como señaláramos en Díaz (op. cit. 2002, pp.21-22): *“Su uso en la investigación con distintos énfasis, está acercando las posibilidades de construcción de saberes en el aula. Estas posibilidades devienen urgencias frente a la magnitud de contenidos que se tornan resistentes al entendimiento de nuestros estudiantes”*. Si bien *“tales construcciones constituyen un desafío que se juega al nivel de cada grupo de estudiantes, su profesora o profesor y un saber escolar específico, abordarlo demanda indagar e intervenir en cada vértice constituyente de este “triángulo didáctico”, así como en sus recíprocas interacciones, alertas a que tales construcciones son a la vez cotidianas e históricas y provienen de actores tanto individuales como colectivos, en contextos socioculturales e históricos específicos que marcan sus posibilidades y limitaciones (...). Cabe hacer referencia a la naturaleza cada vez más compleja que va tomando el triángulo didáctico: cada uno de sus actores, la inter-relación entre éstos, así como sus articulaciones con otros niveles o facetas del fenómeno educativo, en un marco de creciente confluencia de las miradas indagativas de las ciencias humanas. Transitamos hacia la superación de algunas oposiciones, herencia de distinciones clásicas de la filosofía y cuyas resonancias en la sociología se expresan en los dipolos: “colectivo-individual”, “macro-micro”, “objetivo-subjetivo”, “acción-estructura”. Lo que antes se separaba, ahora se inter-relaciona. De este modo, la realidad social se constituye en una totalidad de sentido, una estructura de significaciones sociales, que se manifiesta en sus situaciones particulares, cristalización de múltiples determinaciones sociales, institucionales y personales. En particular un episodio educativo encierra una trama de relaciones en la cual dicho evento se encuentra inserto, y que explican su particular ocurrencia. En este escenario, emergen como objetos válidos de investigar para la didáctica, entre otros, las epistemologías de los sujetos y de sus prácticas educativas. Ello es coherente con una concepción de realidad social donde los sujetos, por el hecho de formar parte de una trama compleja de interacciones, se encuentran involucrados en una estructura dinámica de significados sociales. La búsqueda de comprensión de lo singular nos va permitiendo descubrir los elementos estructurales constituyentes de una realidad particular: expresión de la relación dialéctica de la acción y la estructura”*.

### **Enfoque de las matemáticas desde la didáctica científico-crítica**

Se concibe a las matemáticas como una actividad humana, como una elaboración cultural. En ese carácter, las matemáticas constituyen una construcción humana no exenta de ir y venires, de nociones que se incorporan paulatinamente a una estructura formal, luego de pasar por etapas de formulación y consenso, resultado de inquietudes socio-culturales, en marcos de paradigmas determinados. Se mira a las personas y a la sociedad haciendo matemáticas, construyéndolas, difundiendo y

aprendiéndolas. La problemática que estudia surge en el ámbito de la matemática escolar, aquella que se significa y resignifica en las aulas de los distintos niveles educativos. Explora las variables que puedan explicar o a las que se puedan asociar las dificultades que presenta la enseñanza de las matemáticas y los problemas que aparecen a la hora de aprenderlas. Asimismo estudia las nociones y procedimientos matemáticos en su deriva histórica, desde el marco de su gestión de aula. Especial atención pone en rastrear las nociones fundantes del discurso matemático, incluso antes de que éstas sean formalmente definidas - su prehistoria cultural - con el propósito de identificar hitos en su desarrollo, momentos relevantes, significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que pudieran proporcionar bases o elementos para diseños didácticos robustos.

### **Obstáculos, noción transversal de la didáctica científico-crítica**

El profesorado observa en las producciones de sus estudiantes ideas o contenidos a los que rotula de erróneos toda vez que son distintos de aquellos del currículum explícito que ellos procuran poner en la escena del aula. Este hecho sostuvo por un buen tiempo programas de investigación didáctica que se abocaron al estudio de las "misconceptions", preconcepciones o ideas previas de los estudiantes, en el marco del paradigma del cambio conceptual en la didáctica de la ciencia, el que se abandona progresivamente en tanto se va produciendo un enriquecimiento persistente de marcos teórico didácticos. De analizar los errores en las producciones estudiantiles, se desliza el foco de las indagaciones a los contenidos que se resisten a los entendimientos estudiantiles. A partir de la década de 1980, la noción de obstáculo se instala en la investigación didáctica para colaborar en la búsqueda de respuestas al por qué tales contenidos se revelan resistentes al entendimiento de los estudiantes. Establece la noción de obstáculo epistemológico el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard (1938 citado en Díaz, 1999) en su texto "La formación del espíritu científico". Allí puntualiza: "es en el acto mismo de conocer, intimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas de estancamiento y hasta de retroceso, es allí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos" (p.15). Por su parte, la incorporación de la noción de obstáculo, en la didáctica de las matemáticas, se inicia con la presentación de G. Brousseau en el congreso de la CIEAEM (1976), en Louvain la Neuve. Más adelante el autor discute y examina nuevamente la noción de Obstáculo Epistemológico, contribuyendo al debate sobre las relaciones entre la didáctica y la epistemología de la matemática, precisando que los estudios sobre la base de las concepciones de Bachelard muestran que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que les hizo jugar hasta ese momento la didáctica. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. Esto es, la identificación y caracterización de un obstáculo, son esenciales a los análisis para favorecer aprendizajes. Brousseau transfiere y amplía la noción distinguiendo obstáculos (a) de origen ontogenético que se ligan a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos involucrados en una enseñanza; (b) de origen didáctico para los ligados a las elecciones del sistema de enseñanza; y (c) de origen epistemológico, para los obstáculos ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, es decir los obstáculos en el sentido original que le daba Bachelard. Sierpiska (1985 citado en Díaz, 1999) retendrá dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de G. Bachelard, su carácter inevitable -son necesarios para continuar con el desarrollo del conocimiento- y el que su aparición se repite tanto en la filogénesis como en la ontogénesis de los conceptos. Y, para Artigue (1990 citado en Díaz, 1999), lo que fundaría de alguna manera los obstáculos epistemológicos en la didáctica de la matemática, es por una parte, su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos en cuestión y por otra parte, la observación de concepciones análogas en los alumnos. Estos no se constituyen con solo certificar la resistencia de esas concepciones en los alumnos actuales. Los nudos de resistencia severa en los estudiantes hoy corresponden, a menudo, a los puntos en los que un obstáculo de origen epistemológico histórico interviene, reforzado por un obstáculo de origen didáctico. Díaz (1999) reporta otra fuente concurrente a esos nudos, los obstáculos socioculturales con los que refiere a una polifonía de voces portada por el estudiantado y que entra a competir con la voz escolar que propone enseñar el aula bajo una misma denominación. Son cuerpos de conocimientos

que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas estudiantes y profesores y que manifiestan gran resistencia a su modificación, nociones cotidianas que están jugándose inconscientemente como obstáculos en el entendimiento de los estudiantes de nociones escolares. Se reporta en este artículo la naturaleza de las representaciones estudiantiles cotidianas de límite, en el propósito de aportar información relevante para diseños didácticos que logren superar la resistencia de los entendimientos estudiantiles para aprender el concepto matemático de límite.

### **Las representaciones sociales como instrumental para el estudio de las representaciones estudiantiles y de los obstáculos a sus entendimientos**

Para Bourgeois (1991, citado en Díaz, 1999), la noción de “Representaciones Sociales” designa estructuras mentales cuya característica esencial es el ser sociales; es decir, producidas, compartidas y vehiculadas por un grupo social dado y que están estrechamente ligadas a la vida de ese grupo social. Bourgeois sigue los desarrollos de Moscovici (1979), en su estudio sobre las representaciones del psicoanálisis en el público amplio, los que se originan a su vez, en los trabajos de Durkheim en torno al concepto de “representación colectiva”. Las representaciones sociales se forman a partir de la lengua, las modas dominantes de la época y los modos de comunicación social, incluyendo las conversaciones cotidianas a las que Moscovici llama “hechos anónimos”. Y son sociales tanto por la naturaleza de sus condiciones de producción, como por los efectos que engendran y por la dinámica de sus funcionamientos. El pensamiento social, a diferencia del individual, es concreto y tiende a transformar lo abstracto en visible, palpable; tiende a atribuir un estatus de existencia fáctica a los objetos mentales. Se centra sobre el producto o resultado final, ignorando las condiciones de producción que, según Ibáñez (1988 citado en Díaz, 1999), son fundamentales para entender los rasgos actuales que presenta. Las características del pensamiento social, están presentes en la construcción de las representaciones y forman parte del mecanismo de objetivización. El otro mecanismo presente, según Moscovici, sería el “anclaje”, mediante el cual incorporamos las novedades a nuestro sistema representacional y que depende en gran medida del lugar que ocupamos en el cuerpo social.

### **Un análisis de discurso para el estudio de las textualidades estudiantiles, el análisis estructural**

Estudios en educación que recurren a las representaciones sociales plantean que el análisis estructural permite establecer en ellas dimensiones que las constituyen en un dispositivo analítico para develar entendimientos, toda vez que identifican estructuras mentales -cuyo contenido se compone de las frases, los conceptos, los términos que se utilizan- que refieren a la manera en que se presenta organizado el contenido, a la articulación y relación de conceptos y de términos entre sí y, además, a una dimensión de carácter predictor que establece los esquemas de actividad de los sujetos que sustentan tales estructuras (Piret y otros, 1996, citado en Díaz, 1999). El método del análisis estructural se inicia distinguiendo unidades de sentido en los textos recopilados. Lo anterior supone la aplicación de categorías que tienen la capacidad de resumir en una proposición general otra serie de proposiciones más específicas que forman parte de un texto. El procedimiento considera la identificación de dipolos<sup>3</sup> presentes en el discurso, y continúa con la condensación de grupos de dipolos en ejes categoriales. Posteriormente se podrá continuar con las siguientes fases del análisis dependiendo de los elementos relevados hasta este punto en función de los objetivos del estudio. Es decir, podría avanzarse a identificar, para subconjuntos de ejes categoriales, la relación en la que entran en juego, en el cuerpo del discurso de los hablantes. Esta relación podría ser de tipo paralela, jerárquica o cruzada. Tales relaciones entre ejes categoriales estarán dando cuenta de las estructuras de las representaciones de los sujetos de cada estudio.

Otras lecturas relativas al análisis estructural (S. Martinic, 1992, 1995; A. Piret, J. Nizet y E. Bourgeois, 1996 citados en Díaz, 1999), permiten enriquecer sus ángulos de análisis. En Piret y otros (*op. cit.*) se afirma que el análisis estructural permite aprehender las representaciones puestas

en juego en el discurso, contemplando cuatro aspectos; tres aspectos de orden estático y un aspecto de orden dinámico. Ellos son: un contenido de información (las frases, los conceptos, los términos); una estructura (manera en que se presenta organizado el contenido de la información, la articulación, las relaciones de conceptos y términos entre sí); un aspecto normativo (la valoración positiva o negativa de ciertos elementos de la representación, en términos de bueno/malo, bien/mal, etc.); y, el esquema de acción (un esquema mínimo se compone por un objeto que convoca, el sujeto que trata de obtenerlo y las acciones que realiza éste para obtener ese objeto). Los autores referidos señalan: "El análisis completo de un material exige la construcción de cada una de estas cuatro facetas de la representación (estas son, por lo demás, ampliamente interdependientes). No obstante, en función de la problemática de la investigación, puede ponerse el acento en una de las dimensiones por sobre las otras" (Piret y otros, *op. cit.*, 1996, p. 127).

### La representación estudiantil del límite en el habla cotidiana

El aula universitaria de matemática se propone enseñar el concepto matemático de límite, el que rara vez se aprende significativamente (Díaz, 1999). A modo de ilustración observemos que el currículum prescrito pone en la escena del aula de cálculo inicial<sup>4</sup> una concepción del límite matemático como el que sintetiza el esquema RED CONCEPTUAL EL LÍMITE. El estudiante, por su parte, se apropia de una noción que dista de la enseñada. Sin entrar en los detalles de contenido, bástenos notar la simpleza del esquema RED ESTUDIANTIL DE LÍMITE para el concepto matemático de límite –esquema representativo de los casos estudiados-. Esta red conceptual del límite matemático es elaborada por uno de los estudiantes una vez enseñado el concepto por el docente y habiendo aprobado exitosamente las evaluaciones de aprendizajes de esta noción, aprobando también el curso de cálculo inicial en el que se le enseñó entre otras, esta noción:

La relevancia del concepto de límite, noción propia al cálculo matemático y por lo tanto presente en la formación en pensamiento matemático avanzado<sup>5</sup>, reside en que esta noción, junto con otras nociones del cálculo (derivada, integral,...), están a la base del desarrollo científico tecnológico de la modernidad, esto es, cuantificar cambios de procesos, para predecir y controlarlos.

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite matemático ocurren en la interacción de estudiantes, profesor y concepto, en un contexto de primer año universitario, que es frecuentemente masivo. Los alumnos traen al aula sus propias concepciones, los profesores portan sus propias epistemologías o modos de pensar (más o menos objetivados), respecto de cómo aprenden sus alumnos, del objeto matemático y de cómo enseñarlo en el aula. Por su parte, la distinción matemática de límite, su contenido, es el de un procepto, en el sentido de su doble naturaleza: de proceso u operación matemática y como distinción matemática específica (Díaz, *op. cit.*).

Uno de los propósitos del estudio "Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos" (Díaz, *op. cit.*) -del que damos cuenta en este artículo- fue determinar concepciones con las que los estudiantes abordan el aprendizaje del concepto de límite, a propósito de su enseñanza por parte del profesor, en un contexto de clase masiva de introducción al cálculo universitario<sup>6</sup>, premunidos de la sensibilidad teórica que aportan los distintos enfoques y desarrollos que abordan aspectos de este ámbito de la enseñanza y el aprendizaje matemáticos, así como de un subconjunto de distinciones específicas avanzadas por la investigación didáctica crítico-científica. Las concepciones de los estudiantes abren a nuevas miradas para el estudio de los procesos del pensamiento en matemáticas. Se indaga en sus imágenes cotidianas de límite, estudiando las concepciones de mundo desde las cuales abordan sus procesos de entendimiento del límite matemático.

Recurriendo a la metodología del análisis estructural para el estudio de las textualidades estudiantiles provenientes de cuestionarios y grupos de discusión aplicados en ese estudio, Díaz (*op. cit.*) devela la estructura de la representación cotidiana de la noción estudiantil de *límite*, la que entra al aula invisible para ambos, docente y estudiantado, jugando por su naturaleza, un rol de obstáculo sociocultural a los aprendizajes del concepto matemático de *límite*. Obstáculo que se viene a añadir a los reportados en la literatura pertinente, a saber, obstáculos didácticos, epistemológicos y cognitivos.

En el análisis de la estructura de la noción de *límite* en el habla cotidiana se distinguieron tres

acepciones. La primera, “separador cerrado”, refiere a la constitución de mundos o realidades excluyentes y se relaciona con la familia de acepciones más frecuentes de *término*, *fin* y *lindes*. La siguiente, “separador abierto”, refiere a la familia de acepciones *linde entre* y *lindero entre*, que distingue entre medios diversos. Y una tercera, “valor en un contexto direccionado», que distingue según gradaciones crecientes o decrecientes y está más relacionada con *excepcional*, *culmine*, *cambio*, *quiebre* o *transgresión -pasar y sobrepasar-*. A continuación se desarrollan estas tres acepciones para la noción de límite cotidiano estudiantil.

Primera Aceptación de Límite: Separador Cerrado. Este concepto presenta alguna de las facetas de un borde o un dipolo *adentro-afuera*, manifestándose el límite como una noción generadora de dos realidades, de dos mundos mutuamente excluyentes y abarcables bajo un mismo eje de significado. Dicho borde alude a la frontera de dominios fenoménicos tales como: un espacio físico, un espacio de vida o hábitat y un dominio de acciones posibles de desplegar por los sujetos o espacio sociocultural.

Segunda Aceptación de Límite: Separador Abierto. En este caso, la separación estatuye diversidades -pertenecientes a un mismo tipo de entidad, tales como áreas o países- en lugar de las realidades polares excluyentes, las entidades de naturaleza disjuntas, o, lo permitido versus lo prohibido, del concepto de “separador cerrado”. *Entre medio, en medio, que media*: una separación que media para la distinción entre dos entidades o más. Este concepto de “separador abierto” media diversidades en lugar de señalar polos excluyentes, relaciona varios ámbitos de un mismo campo semántico, antes que separar mundos opuestos como en el caso del concepto anterior.

Tercera Aceptación de Límite: Valor en un Contexto Direccionado. En esta tercera acepción, *límite* se asocia a valores especiales: es un instante de cambio –indica un fin y un comienzo, un punto de tránsito más o menos fluido- o se trata de un punto de máxima expresión (suerte de meta final o término, un óptimo o culmen). Puede tener o no tener posibilidades de ocurrir efectivamente como cuando en el habla cotidiana se afirma que “ese pianista toca como los dioses”. De ocurrir, puede o no sostenerse en el tiempo (mantener una marca deportiva o dejar un mal hábito), y también, superarse o no. Si bien la mayoría de los enunciados refiere al punto *límite* como llegada (cumbre, máximo) hay ilustraciones como un paso por el punto límite, asociado a cambio como lo exhibe la textualidad estudiantil: “ese deportista habrá desarrollado su mente y cuerpo que sentirá que no podrá ser vencido por ninguna otra persona” (Díaz, *op.cit.*, Anexo D).

### Valoraciones de los límites en el habla cotidiana

Para las acepciones de “separador cerrado” y “valor en un contexto direccionado” se infieren valoraciones positiva y negativa. Para “separador cerrado”, en su faceta de constituyente de las realidades polares adentro y afuera, en su mayor parte *adentro* tiene valores positivos: permitido, seguro, dentro de los márgenes, dentro de lo aceptable; *afuera* tiene valor negativo: prohibido, inseguro, fuera de los márgenes, rebasa lo aceptable. Existen algunos casos de textualidades en que estas valoraciones se revierten. *Adentro* implica una disminución y *afuera* se asocia con potencialidades. El borde separador se evalúa de modo positivo al asociarlo con: un cambio que es reversible, que no tiene consecuencias; una evolución, y también un ordenador que se constituye en un referente orientador.

Por su parte, un quiebre, un cambio con consecuencias, una marginación, una restricción impuesta, ilustran valoraciones negativas para la voz cotidiana de *límite*.

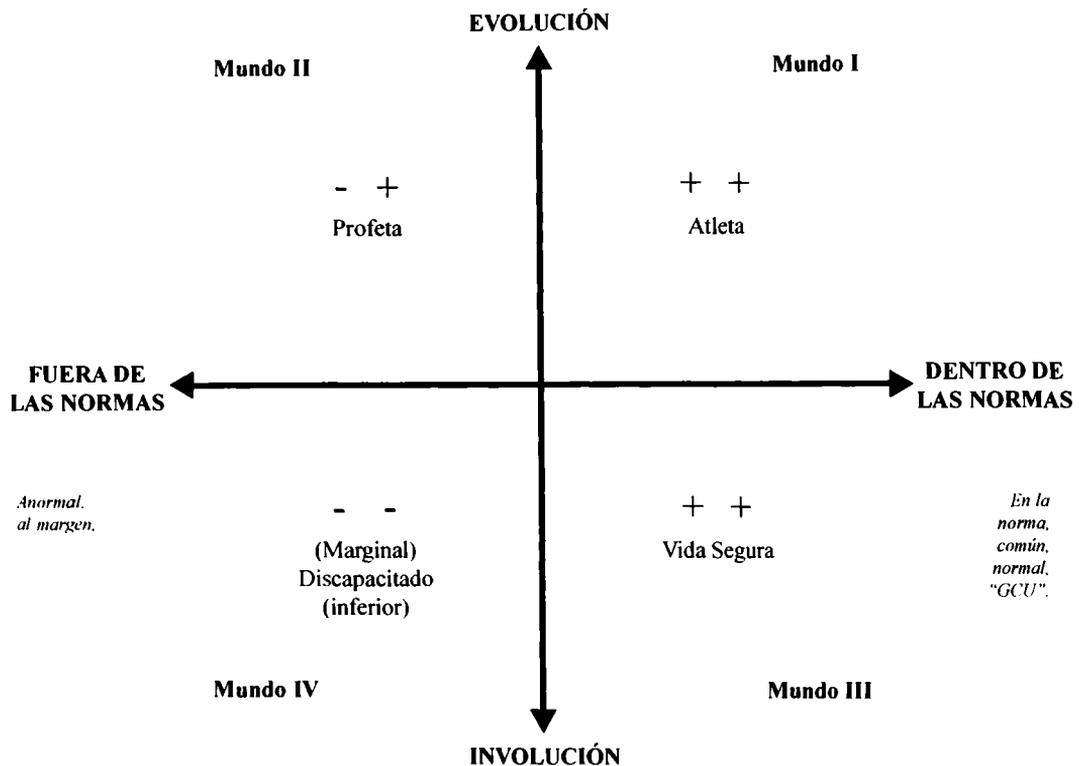
Para la acepción, “valor en un contexto direccionado”, lo positivo se alcanza después del valor *límite*: aquella nueva realidad es más, es mayor, es superior, constituyéndose realidades menores, inferiores, disminuidas antes del valor *límite*. El valor mismo, a su vez, presenta ambas valoraciones: negativa en tanto tope o término y positiva en cuanto desafío, meta, cumbre y punto de cambio.

Las calificaciones para “separador cerrado” y “valor en un contexto direccionado”, son acepciones vinculadas a fuerzas socializadoras que se relacionan con la existencia misma del sujeto. “Fuera” significa transgresiones entre cuyas consecuencias se encuentran la inseguridad por la marginación, pasando por un quiebre irreversible en el límite mismo. Entonces, el sujeto velará por mantenerse dentro de los márgenes de modo consciente como inconsciente. Ello será una fuerza sustantiva para

evitar el límite y, más aún, «tocarlo». Se le asigna un valor de «extremo-peligro» y de máximos alcanzables «justo antes» del cambio irreversible.

### Estructura de la representación cotidiana de límite

Condensando los conjuntos de acepciones descritos, se distinguen dos ejes categoriales: (a) el eje constituido por los dipolos *evolución-involución* y (b) el eje que va desde estar *dentro de las normas* a estar *fuera de las normas*, de connotaciones positivo-negativa respectivamente. Representando cada eje por una línea recta y, atravesando uno al otro de modo perpendicular, se obtiene la figura de un plano cartesiano el que representa un esquema de estructura cruzada, estableciendo cuatro mundos posibles –que identificamos como I, II, III y IV- a los que el estudiantado asocia la noción cotidiana de límite (ver esquema ).



Un mundo que habitarán una mayoría, personas “normales” o “GCU”, gente como uno. En términos de las textualidades estudiantiles (Díaz, *op.cit.*, Anexo D), se trata de un mundo con “una especie de reglas hasta donde uno puede llegar y están hechos (...) para hacer más segura la vida”. Si bien es un mundo con restricciones, “que se impone”, que se vive “con ansiedad por saber que hay más allá”, también explicita “lo que no puedo hacer”, alertando “cuando llegamos a una situación límite, cuando esa situación ya no puede ser revertida” y, por ende, evitar llegar a ella, para asegurar, con ello, nuestra vida. Se trata de un mundo con facetas, que el estudiantado valora de positivas unas y de negativas otras. En un mundo dos veces positivo estará “ese deportista (que) habrá desarrollado su mente y cuerpo (...) sentirá que no podrá ser vencido por ninguna otra persona” y que, por lo mismo, ha superado límites mentales y físicos de la mayoría de las personas sin que ello le signifique un extremo peligro, sino que experimenta una evolución exenta de efectos irreversibles a su vida biológica y social. Muy por el contrario, potencia el dominio de su cuerpo y gana en valoración

social. En una situación contraria y doblemente negativa, se encuentra “(...) una persona (que) es discapacitada, (que) está limitada tanto físicamente como económicamente”. Si ella se encuentra marginada económica y físicamente, vive una doble exclusión: no cuenta con su cuerpo y tampoco cuenta para una sociedad que visibiliza a las personas en tanto se constituyen en sujetos económicos, aportando a la circulación del dinero como productores y consumidores. Un cuarto mundo posible, ambivalente, que emerge del cruce de categorías y que cuenta con ilustraciones implícitas en las textualidades estudiantiles lo constituiría, por ejemplo, un mundo habitado por “profetas”. En efecto, se trata del accionar de personas que “se entregan a una causa” y cuyas acciones superan las exigencias éticas que manifiesta la mayoría de la gente de su tiempo y lugar, y que les lleva a sufrir una cierta marginación social, aún cuando a posteriori la sociedad les pueda valorar su testimonio ético. La mayoría de los jóvenes se visualizan “normales”, por lo que no ven a su escala los mundos del atleta ni del profeta, eludiendo, por su parte, los riesgos de traspasar esos límites que los exponen a más de una marginación.

### **A modo de conclusión**

El estudiantado ancla el concepto matemático de límite en estas ideaciones, invisibles para sí mismo y para el profesorado. Sus resonancias obstaculizan construir las características del concepto matemático, noción construida por la comunidad matemática en un devenir histórico de varios siglos, por lo que es una elaboración extranjera a las elaboraciones y significaciones cotidianas estudiantiles. Éstas, por su parte, se han construido con otros en la enacción<sup>7</sup>, reforzando aquellas facetas que han significado un acoplamiento en la acción eficiente con el entorno -natural, social y cultural-y que configuran el mundo de vida de los jóvenes. El aprendizaje significativo del límite matemático requiere distinguirlas, para dialogar con ambas acepciones, la cotidiana y la matemática y establecer sus dominios de legítima validez, favoreciendo una acción eficiente en cada uno de ellos. El esquema RED ESTUDIANTIL DE LÍMITE exhibe una mixtura de facetas de las nociones cotidiana y matemática de límite que no auguran una eficacia en la acción en el dominio matemático. Sobre la base de lo expuesto es posible visualizar diseños de secuencias didácticas que la favorezcan. Desde la mirada de unas matemáticas entendidas como actividad humana, cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas y no solo el producto matemático. Por ello incorporar a los estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan la construcción de unas “matemáticas vivas” que dialogan con sus representaciones cotidianas. Dando espacio y tiempo a las negociaciones y a la búsqueda de consensos, entrelazados éstos con las enacciones de los estudiantes, al momento de enfrentarse a la resolución de un problema y a los procesos discursivos específicos, en la construcción social del conocimiento matemático. Esto incluye tanto a las versiones estudiantiles sobre un contenido matemático determinado como a la organización del discurso, a la manera de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras los resultados de una situación problema, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Todo lo anterior en el marco particular de aquellas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio<sup>8</sup>, esto es, matemáticas que se dirigen a cuantificar cambios y cambios de cambios en un fenómeno<sup>9</sup>, permitiendo predecir y controlar estados futuros. Entre los conceptos de base de esta matemática se halla el límite matemático cuyo aprendizaje significativo requiere del diálogo con las facetas del límite cotidiano.

### **Bibliografía**

- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En *Actas del XXVIII Congreso de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas*, C.I.E.A.E.M., Louvain la Nueve, pp 101-117.
- Brousseau, (1987). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Manuscrito no publicado. Trad. Centeno J., Melendo, B. y Murillo, J. Prog. Doctorado U. Zaragoza.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, Una Mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *ALME* (Vol. 17, pp. 1-9). México: Clame.

- Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis de Doctorado para la obtención del grado de Doctora en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
- Díaz, L. (2002). Los entendimientos en matemáticas. En *Intramuros*, Año 3, N°10, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.
- Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Proyecto Fondecyt 2003/1030413. Santiago: Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Coordinación de Postítulos y Postgrados.
- Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público*, Huelmal. Buenos Aires. (Trabajo original publicado en 1961).
- Soto, I. (1993): *La Didáctica Fenomenológica propuesta por H. Freudenthal*. Manuscrito no publicado. Santiago: CIDE.
- Varela, F. (1990). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Editorial Gedisa.

### Notas

<sup>1</sup> Artículo basado en Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis de Doctorado para la obtención del grado de Doctora en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

<sup>2</sup> Profesora del Programa de Post-grado de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Doctora en Ciencias de la Educación.

<sup>3</sup> Tesis principal del análisis estructural es que organizamos la percepción de la realidad en categorías o clasificaciones binarias, opuestas y complementarias; por ejemplo, las clasificaciones o distinciones de: bueno-malo, bonito-feo, izquierda-derecha, alto-bajo, caro-barato, rápido-lento,... Binario en cuanto "doble": dos categorías o clasificaciones. Opuesto, refiriendo a "lo contrario". Y complementario para señalar "algo que completa"; es la misma idea de conjunto A y su complemento, el conjunto Ac que, unidos, dan el universo o conjunto U. En efecto, el mundo puede ser dividido en buenos y malos, altos y bajos, feos y bonitos... y estamos describiendo el universo - la totalidad - con dos categorías o clasificaciones que lo cubren totalmente (Díaz, 2003).

<sup>4</sup> La expresión "Aula de Cálculo Inicial" refiere a la enseñanza de cálculo que se imparte -con distintas denominaciones: Cálculo I, Matemáticas I,...- en el primer semestre universitario de carreras científico tecnológicas. Éstas pueden corresponder al ámbito de las ingenierías (Eléctrica, Mecánica,...), de las ciencias (Licenciaturas en Ciencias Básicas, Medicina,...), de las tecnologías (Tecnología en Sonido, Biotecnología,...), de las pedagogías en ciencias básicas y formales (Pedagogía en Matemáticas, en Física,...), entre otras.

<sup>5</sup> Se habla de pensamiento matemático avanzado en la formación matemática superior, para diferenciarlo de un pensamiento matemático escolar, que se caracteriza por centrarse en los razonamientos y la operatoria algebraica. El estudiantado debe dar saltos cualitativos de formas de pensar y operar en su tercer ciclo de estudios, tales como operar con aproximaciones en lugar de igualdades y demostrar por "sobre y subestimaciones" los dominios de validez de propiedades, ahora locales en lugar de las globales trabajadas en sus primeros doce años de escolaridad.

<sup>6</sup> Igual que antes (Nota 2), con esta expresión nos referimos a las clases de cálculo en el tercer ciclo de estudios. Estas suelen ser masivas, pudiendo considerar entre 100 y 120 estudiantes en el aula.

<sup>7</sup> Enfoque de las ciencias cognitivas, incorporado por el neurobiólogo chileno Francisco Varela en la década de los ochenta y que considera a la cognición como una "historia del acoplamiento estructural que enactúa (hace emerger) un mundo" y que funciona "a través de una red de elementos interconectados capaces de cambios estructurales durante una historia ininterrumpida" (Varela, 1990).

<sup>8</sup> Por ejemplo el concepto-herramienta matemático de la rapidez es la herramienta matemática de la razón de cambio, un cociente cuyo numerador es la cuantificación de un desplazamiento y su denominador es la cuantificación del tiempo que duró ese desplazamiento.

<sup>9</sup> Si un móvil se desplaza entre los kilómetros 40 y 80 en media hora, y continúa su desplazamiento sin variar sus características, se puede predecir que pasará por el kilómetro 60, en 15 minutos más de su recorrido. Si cambia la rapidez de desplazamiento, hablamos de la aceleración del móvil, es decir, del cambio del cambio de sus desplazamientos en una cantidad de tiempo.